SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Definición

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales en las mismas variables. La solución de un sistema de ecuaciones es la intersección de los conjuntos de soluciones de cada una de las ecuaciones en el sistema.

Los siguientes son ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales.

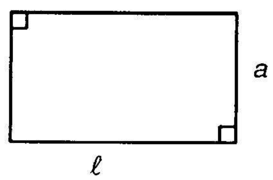
1. $\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2y = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5x = 3 \\ 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y + 3t = 2 \end{cases}$

En la vida diaria, obtenemos sistemas de ecuaciones cuando establecemos relaciones entre las variables que cumplen ciertas condiciones de un problema.

EJEMPLOS:

1. El perímetro de un rectángulo mide 72 cm. Si su largo es el doble de su ancho, halla sus dimensiones.

   Sean a = ancho y ℓ = largo.



El perímetro del rectángulo es igual a la suma de las medidas de los lados del rectángulo. Esto nos permite relacionar las desconocidas a y ℓ en la siguiente ecuación.

$$P = 2a + 2\ell = 72.$$

Como el largo ℓ es el doble del ancho a, obtenemos la ecuación

$$\ell = 2a.$$

El sistema de ecuaciones que obtenemos es el siguiente:

$$\begin{cases} 2a + 2\ell = 72 \\ \ell = 2a \end{cases}$$

2. Tres libretas y dos lápices cuastan \$2.40. Cuatro libretas y dos lápices de la misma clase cuestan \$3.55. ¿Cuál es el precio de una de estas libretas y uno de estos lápices?

Hallemos un sistema de ecuaciones que exprese la relación entre los precios de los lápices y las libretas. Si x es el costo en dólares de una libreta, entonces $3x$ es el costo en dólares de 3 libretas y $4x$ es el costo en dólares de 4 libretas. Si y es el costo en dólares de un lápiz, entonces $2y$ es el costo en dólares de 2 lápices y $5y$ es el costo en dólares de 5 lápices. Las desconocidas se pueden relacionar en la siguiente forma:

El precio en dólares de 3 libretas y 2 lápices es 2.40.

$$3x + 2y = 2.40$$

El precio en dólares de 4 libretas y 5 lápices es 3.55.

$$4x + 5y = 3.55$$

El sistema que obtenemos es

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2.40 \\ 4x + 5y = 3.55. \end{cases}$$

¿CÓMO SOLUCIONAR UN SISTEMA DE ECUACIONES?

Existen varios métodos para determinar el par ordenado que satisface dos ecuaciones (sustitución, igualación, suma y resta, Cramer, Gauss, etc.) Si embargo el de más aceptación es el de suma y resta, y es el que emplearemos para resolver estos ejercicios. Para aplicar este método las ecuaciones deben tener la forma: $Ax + By = C$

El fundamento de este método consiste en lograr que al sumar las dos ecuaciones, alguna de las dos variables "será eliminada", pues esto nos permitiría despejar la restante fácilmente.

Ejemplo:
Determinar el punto de intersección de las siguientes rectas:
$y = 2x + 3$; $y = 5x - 6$
Para obtener esto existen varios métodos, no obstante el más sencillo consiste en multiplicar la primera ecuación por el coeficiente de la x de la segunda ecuación, y multiplicar la segunda ecuación por el opuesto del coeficiente de la x de la primera ecuación:

$$\begin{array}{l|l} -2x + y = 3 & -5 \\ 5x + y = -6 & 2 \\ \hline 10x - 5y = -15 & \\ 10x + 2y = -12 & \\ \hline \end{array}$$

De esta manera al sumar ambas ecuaciones llegamos a: $-3y = -27$, o bien $y = 9$

Para hallar el valor de *x*, sustituimos *y=9* en cualquiera de las ecuaciones originales (utilice la que le parezca más simple).

$9 = 2x + 3$

$9 - 3 = 2x$

$6 = 2x$

$\frac{6}{2} = x$

$3 = x$

El punto de intersección de las rectas corresponde al par (3, 9). Podemos comprobar que satisface las dos ecuaciones:

$y = 2x + 3 \qquad 9 = 2 \cdot 3 + 3 \;\rightarrow\; 9 = 9$

$y = 5x - 6 \qquad 9 = 5 \cdot 3 - 6 \;\rightarrow\; 9 = 9$

En la presente ante el exceso de información es necesario agilizar los cálculos, de ahí que el uso de la tecnología y específicamente, la calculadora, resultan muy valiosos. Recuerde que la calculadora agiliza los procedimientos algorítmicos, los mecanismos se llevan a cabo sin ningún razonamiento. La calculadora no resuelve problemas, no piensa ni razona, solamente agiliza los cálculos.

A la luz de lo anterior, otro método para determinar el punto de intersección entre dos rectas es mediante el uso de la calculadora.

Para este método, también como el de la suma y resta, se debe ordenar la ecuación de la forma $Ax + By = C$.

Debe usar el modo ecuación simultánea de su calculadora. Llegar a ese modo varía según el modelo de la calculadora. Lea el manual de su calculadora.

Dentro de la plantilla que usa la calculadora las ecuaciones se ordenan de la forma:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Por lo que su calculadora solicitara los datos en ese orden.

Ejemplo:

Determinar el punto de intersección entre las rectas:

$5x + 14y = 17$;

$10x + 19y = 7$

A medida que la calculadora solicite los datos debe dárselos en ese orden

$a_1=5$ $b_1=14$ $c_1=17$
$a_1=10$ $b_1=19$ $c_1=7$

La intersección corresponde al punto (-5, 3).

Ejercicios 1

1. Dibuja las gráficas de las rectas en cada sistema de ecuaciones y determina el conjunto solución del sistema.

a. $\begin{cases} x+3=0 \\ y-4=0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ x-2y+8=0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 2x-3y=6 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-2y=4 \end{cases}$

2. Resuelve cada uno de los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x+y=2 \\ 4x-3y=13 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x-4y=6 \\ y=2x+1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x-3 \\ 2x-y=8 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 5x+y+2=0 \\ x+2y=5 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x=4y \\ 3x+8y=5 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 2x+3y=16 \\ y=2x \end{cases}$

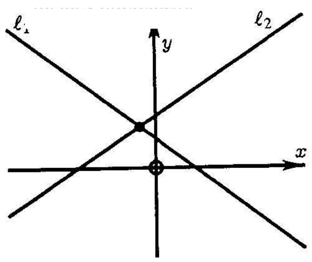
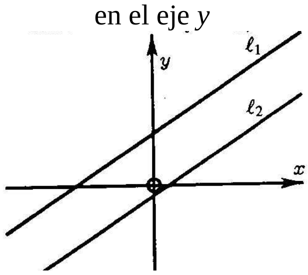
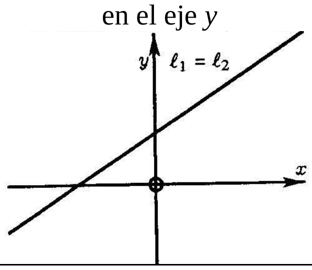
j. $\begin{cases} 3x-3y=1 \\ y=x+5 \end{cases}$

k. $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$

l. $\begin{cases} 3x-y=6 \\ \frac{1}{3}x-y=2 \end{cases}$

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de dos ecuaciones lineales en dos varibles se representa gráficamente como dos recta. El número de soluciones del sistema estará determinado por la posición de las rectas en el plano y su relacion entre sí.
Veamos la siguiente tabla:

Grafica del sistema	Número de puntos de intersección	Número de soluciones del sistema	Nombre del sistema
Dos rectas con pendientes diferentes 	Un punto	Una solución	determinado
Dos rectas con la misma pendiente y diferente corte en el eje *y* 	No tiene punto de intersección	No tiene solución	inconsistente
Dos rectas con la misma pendiente y el mismo corte en el eje *y* 	Infinito	Infinito	Dependiente

Ejercicio 2

1. Para los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. Indica si el sistema es determinado, inconsistente o dependiente.
2. Establece si las rectas se intersecan, son paralelas o coinciden.
3. ¿Cuántas soluciones tiene cada sistema?

a. $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ g. $\begin{cases} y = x \\ 3y - x = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -x + 3y = 5 \end{cases}$ h. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$ i. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x = 6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ j. $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$ k. $\begin{cases} 2x - 2y = 7 \\ 3x - 3y = 5 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = x + 2 \end{cases}$ l. $\begin{cases} 5x + y = 4 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$

2. Encuentra el valor de k de manera que cada uno de los siguientes sistemas no tenga solución.

a). $\begin{cases} x - y = 7 \\ kx + 4y = 3 \end{cases}$

b). $\begin{cases} 3x - ky = 0 \\ 6x + 4y = 5 \end{cases}$

c). $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ kx + 5y = 3 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes problemas usando un sistema de dos ecuaciones en dos variables:

a. Halla dos números entero tales que su suma sea 135 y su diferencia sea 61.

b. La suma de dos números enteros es 21. El número más grande es dos veces mayor que el otro. Halla los números.

c. Se vendieron 812 entradas para cierto evento, sumando un total de $1,912. Si los estudiantes pagaron $2.00 por entrada y los no-estudiantes pagaron $3.00 por entrada, ¿cuántas entradas de estudiantes se vendieron?

d. Se mezclan caramelos que cuestan $1.80 la libra y dulces que cuestan $0.90 la libra para obtener 150 libras de dulces que luego se venden a $1.50 la libra. ¿Cuántas libras de caramelos se necesitan?

e. Un camión está cargando un total de 150 paquetes pequeños. Algunos pesan 1 Kg y otros 2 Kg. ¿Cuántos paquetes de cada peso está cargando el camión si el peso total es de 265 Kg?

f. Tres libretas y dos lápices cuestan $2.40. Cuatro libretas y cinco lápices de la misma clase cuestan $3.55. ¿Cuál es el precio de una libreta y cual el de un lápiz?

Solución ejercicio 1

1. **a.** $\{(-3,4)\}$ **b.** $\{(5/3,-5/3)\}$ **c.** $\{(-2,3)\}$
d. $\{(4,3)\}$ **e.** $\{(-3,-4)\}$ **f.** $\{(18/5,-1/5)\}$

2. **a.** $\{(5,-2)\}$ **b.** $\{(2,1)\}$ **c.** $\{(1,-3)\}$
d. $\{(-2,-3)\}$ **e.** $\{(3,-2)\}$ **f.** $\{(-1,3)\}$
g. $\{(5,3)\}$ **h.** $\{(1,1/4)\}$ **i.** $\{(2,4)\}$
j. $\{\}$ **k.** $\{(2,1)\}$ **l.** $\{(3/2,-3/2)\}$

Solución ejercicio 1

	Clasificación	Rectas	Número de soluciones
a	inconsistente	paralelas	ninguna
b	determinado	se intersecan en un punto	una
c	dependiente	coinciden	infinitas
d	inconsistente	paralelas	ninguna
e	dependiente	coinciden	infinitas
f	determinado	se intersecan en un punto	una
g	determinado	se intersecan en un punto	una
h	determinado	se intersecan en un punto	una
i	determinado	se intersecan en un punto	una
j	determinado	se intersecan en un punto	una
k	inconsistente	paralelas	ninguna
l	determinado	se intersecan en un punto	una

2. **a.** $k = -4$ **b.** $k = -2$ **c.** $k = 3$

3. **a.** 98.37 **b.** 7, 14 **c.** 524
d. 100 **e.** 35 de un kg y 115 de 2 kg
f. Una libreta a $0.70, un lápiz a $0.15
g. $1.43/docena de huevos, $1.51/lb de mantequilla

BIBLIOGRAFIA

- ✓ **Matemática introductoria. EUNED**
- ✓ **Fundamentos de matemática básica. ADDISON WESLEY**
- ✓ **Matemática aplicada. EUNED**