Ecuaciones Lineales y Desigualdades con Valor Absoluto

La resolución de ecuaciones y de desigualdades de primer grado con valor absoluto, requiere de dos procedimientos (Caso 1 y Caso 2), en que se utilizan las mismas leyes de una ecuación y de una inecuación lineal normal.

Definición de Valor Absoluto

El valor absoluto de un número real x se denota por $|x|$ y se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Veremos ahora unos teoremas que nos servirán para resolver las ecuaciones.

Teorema 1: Para cualquier número real x:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \longleftrightarrow x = 0$
3. $|x|^2 = x^2$
4. $\sqrt{x^2} = |x|$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$

Teorema 2: Para cualquieras números reales x y a:

$$|x| = a \longleftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ y \\ x = a \ \ y/o \ \ x = -a \end{cases}$$

Teorema 3: Para cualquieras números reales x y a:

$|x| = |a| \longleftrightarrow (x = a \ \ y/o \ \ x = -a)$

Teorema 4: Para cualquieras números reales x y a:

1. $|x| \leq a \longleftrightarrow -a \leq x \leq a$
2. $|x| \geq a \longleftrightarrow x \leq -a \vee a \leq x$

Teorema 5: Para cualquieras números reales x y a:

1. $|x + a| \leq |x| + |a|$
2. $|x \cdot a| = |x| \cdot |a|$

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $|x - 8| = 12$.

Solución: por el Teorema 2, la primera desigualdad es obvia ($12 \geq 0$). Por la segunda desigualdad tenemos dos casos para analizar

Caso 1:
Si $x - 8 \geq 0$ entonces, $|x - 8| = x - 8$.

x-8=12

x=12+8

x=20

Caso 2:
Si $x - 8 < 0$ entonces, $|x - 8| = -(x - 8)$.

-(x-8)=12

x-8=-12

x=-12+8

x=-4

Ahora bien la solución; S={x/ $|x - 8| = 12$ }={-4,20}

Ejemplo 2: Resolver la ecuación: $|2x + 1| = x + 3$.

Solución: por el Teorema 2, tenemos las siguientes opciones.

$$|2x+1| = x+3 \longleftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ y \\ 2x+1 = x+3 \;\; y/o \;\; 2x+1 = -(x+3) \end{cases}$$

Por la primera desigualdad, claramente x tiene que ser mayor que -3.

$x + 3 \geq 0$

$x \geq -3.$

Caso 1:

2x+1=x+3

2x-x=3-1

x=2

Caso 2:

2x+1=-(x+3)

2x+1=-x-3

2x+x=-3-1

3x=-4

x=$\frac{-4}{3}$

Tanto $x = -\frac{4}{3}$ como x=2, cumplen la primera desigualdad.

La solución es: S={x/$|2x + 1|$=x+3 }={ $\frac{-4}{3}$,2 }.

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $|x - 2| = 3x - 9$.

Solución: por el Teorema 2, tenemos las situaciones

$$|x-2| = 3x - 9 \longleftrightarrow \begin{cases} 3x - 9 \geq 0 \\ y \\ x - 2 = 3x - 9 \;\; y/o \;\; x - 2 = -(3x - 9) \end{cases}$$

De la primera desigualdad tenemos que $3x - 9 \geq 0$ y despejando obtenemos $x \geq 3$. Esta desigualdad es fundamental para establecer que valores sirven como solución.

Caso 1:

x-2=3x-9

x-3x=-9+2

-2x=-7

x=$\frac{7}{2}$.

Caso 2:

x-2=-(3x-9)

x-2=-3x+9

x+3x=9+2

4x=11

x=$\frac{11}{4}$.

De estas dos soluciones solo $\frac{7}{2}$ cumple que sea mayor que 3. La solución $\frac{11}{4}$ es menor que 3 y se descarta.

S={x/ $|x - 2|$=3x-9 }={ $\frac{7}{2}$ }.

Ejemplo 4: Resolver la desigualdad $|x+12| \leq 4$.

Solución: por el Teorema 4, parte 1, tenemos las siguientes opciones.

$$|x+12| \leq 4 \longleftrightarrow -4 \leq x+12 \leq 4$$

restando 12 a los tres términos, tenemos

$$-4-12 \leq x+12-12 \leq 4-12$$

$$-16 \leq x \leq -8$$

lo que es equivalente a $x \in [-16,-8]$

y la solución finalmente S=[-16,-8].

Ejemplo 5: Resolver la desigualdad $|x-9| \geq 14$.

Solución: por el Teorema 4, parte 2, tenemos las siguientes opciones.

Caso 1:

$x-9 \leq -14$

$x \leq -14+9$

$x \leq -5$

$x \in]-\infty,-5]$

$S_1 =]-\infty,-5]$

Caso 2:

$14 \leq x-9$

$14+9 \leq x$

$23 \leq x$

$x \in [23,+\infty[$

$S_2 = [23,+\infty[$

La solución global es: $S =]-\infty,-5] \bigcup [23,+\infty[$

EJERCICIOS

Determinar las soluciones de las ecuaciones y de las desigualdades dadas.

1. $|x-4|=3$
2. $|x-5|=16$
3. $|2x+3|=7$
4. $|3x|=6$
5. $|x-2|=3$
6. $|2x-3|=9$
7. $|x-1|=2x-1$
8. $|3x+2|=5-x$
9. $|5x+4|=2x+1$
10. $|-6x+1|=4x-7$
11. $|x+4|=|x+2|$
12. $|x-4|=|x-2|$
13. $|3-x|=|1+x|$
14. $|x+3|<8$
15. $|x-6|<4$
16. $|x-1|>5$
17. $|2x-5|\geq 3$
18. $|2x-3|<5$
19. $|3x-5|>4$
20. $|4x-3|\geq 1$
21. $|3x+1|>15$
22. $|\frac{2x}{3}-1|<2$
23. $|\frac{2(x+5)}{3}|\leq \frac{4}{5}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: aplicación del valor absoluto

1. La Compañia MNO tiene tres sucursales situadas en línea recta sobre el mapa. La sucursal B está a 300 kilometros al este de la sucursal A y la sucursal C está 1100 km al oeste de la sucursal A. Encontrar la distancia $|CB|$.

2. Una compañia tiene tres plantas, A, B y C, localizadas sobre una línea recta en el mapa. Encontrar la distancia de C a B si B está 600 km al oeste de A y C está a 900 km al este de A.

3. Encontrar la distancia entre los siguientes pares de números que caen sobre la línea de los números:
   a) 4 y 7 b) -3 y 5 c) -9 y -2.

4. Hallar el intervalo entre los que se encuentra la ganancia P, si $|P - \$1000| < \$300$.

5. ¿ En que rango de valores cae la ganancia P, si $(2P - \$100)^2 \leq \$250000$?

6. ¿ Qué rango de valores toma la ganancia, P, cuando $(2P + \$10)^2 < \$6400$?

7. Hallar el rango de valores del costo C, sabiendo que $|\frac{C}{C-12}| < 1$

8. Encontrar el conjunto de soluciones de $x^2 - 6x + 9 \geq 4$.

9. Encontrar el conjunto de solución de $x^2 - 8x + 16 \leq 9$.

10. Encontrar el conjunto de solución de $x^2 + 6x + 9 > 16$.

11. Encontrar la distancia d si,

$$\left|\frac{d}{d-4}\right| \leq 1$$

12. Nótese que puesto que $2 < 3 < 4$, entonces $\frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{1}{4}$. Apliquese esta idea a la desigualdad $5 < x < 6$.

13. Resolver para la cantidad de bienes, q, si $q^2 < 625$.

14. Determinar el valor de la ganancia, P, si $p^2 \geq 14400$.

15. Si q representa cantidad de bienes y $|q-2|=|4-q|$, encontrar el valor de q. Sugerencia: elevar al cuadrado ambos lados, simplificar y resolver.

16. Encontrar dos expresiones lineales que estén representadas por $C=|2q+3|+4$, (C representa el costo y q la cantidad producida).

Bibliografía

[1] Kovac, Michael L. Matemática: aplicaciones a las ciencias económicas-administrativas.

[2] Taylor, Howard y Thomas Wade. Matemáticas Básicas: con vectores y matrices.