ECUACIONES CUADRÁTICAS

Es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la variable es 2.
Así,

$4x^2 + 7x + 6 = 0$ *es una ecuación de segundo grado.*

Ecuaciones completas de segundo grado so ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, *que tiene un termino en* x^2, *un termino en* x *y un termino independiente.*

Así, $x^2 + 7x + 5 = 0$
$4x^2 - 3x + 6 = 0$
$3x^2 + 5x - 6 = 0$ *son ecuaciones completas.*

Ecuaciones incompletas de segundo grado son ecuaciones de la forma:
$ax^2 + c = 0$, *carecen del termino x.*

Así, $x^2 + 5 = 0$
$4x^2 + 6 = 0$
$3x^2 - 6 = 0$ *son ecuaciones incompletas.*

Raíces de una ecuación son los valore de la incógnita que satisfacen la ecuación.
Así -1 y 3 son raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$

Puesto que $(-1)^2 - 2.(-1) - 3 = 0$, *además* $(3)^2 - 2.(3) - 3 = 0$

Para determinar el número de raíces de la ecuación cuadrática hacemos uso de un valor llamado discriminante, el cual se obtiene mediante la formula $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ *y que se denota con* Δ.

Si $\Delta > 0$ *tiene dos raíces reales.*
Si $\Delta = 0$ *tiene una raíz real.*
Si $\Delta < 0$ *no tiene raíces reales.*

Ejemplo 1

El discriminante para $x^2 - 2x - 3 = 0$, *sabiendo que* $a = 1$ $b = -2$ $c = -3$ *y aplicando la formula* $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ *es 16.*

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3$
$\Delta = 4 - -12$
$\Delta = 16$

Como el discriminante es mayor que cero podemos afirmar que tiene dos raíces reales.

Práctica # 1

A. *Determinar los coeficientes a, b, c, en los siguientes trinomios de segundo grado:*

1) $x^2 - 7x + 9 \Rightarrow a =$ _______, $b =$ _______, $c =$ _______
2) $5x^2 - x + 1 \Rightarrow a =$ _______, $b =$ _______, $c =$ _______
3) $7 - 3x - x^2 \Rightarrow a =$ _______, $b =$ _______, $c =$ _______
4) $6x^2 - 7x - 3 \Rightarrow a =$ _______, $b =$ _______, $c =$ _______
5) $-x^2 + x - 1 \Rightarrow a =$ _______, $b =$ _______, $c =$ _______
6) $2x - 4x^2 + 6 \Rightarrow a =$ _______, $b =$ _______, $c =$ _______
7) $6 + x^2 - x \Rightarrow a =$ _______, $b =$ _______, $c =$ _______
8) $12 - 15x - x^2 \Rightarrow a =$ _______, $b =$ _______, $c =$ _______

B. *Determinar el DISCRIMINANTE (Δ), en cada una de las siguientes ecuaciones. Además escriba el número de raíces reales de cada una.*

1) $6x^2 - 7x - 3 = 0$
2) $5x^2 + 3x - 1 = 0$
3) $x^2 - x + 1 = 0$
4) $-x^2 + 2x - 3 = 0$
5) $-x^2 + 6x - 9 = 0$
6) $x^2 - 4x - 5 = 0$
7) $3z^2 - z - 2 = 0$
8) $10t^2 - 3t - 15 = 0$
9) $25x^2 - 10x + 1 = 0$
10) $-x^2 + 3x + 2 = 0$

Conjunto de solución

Es el conjunto que contiene las raíces de una ecuación cuadrática.
Para determinar este conjunto existen varios métodos. Uno de ellos recibe el nombre de formula general-

La formula general corresponde a la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ejemplo 2

Para determinar el conjunto de solución de $x^2 + 3x - 4 = 0$
$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot -4 \cdot 1$
$\Delta = 9 + 16$
$\Delta = 25$

Como es mayor que cero, tiene dos soluciones por lo tanto, utilizamos dos formulas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2.1} \qquad x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2.1}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_1 = -4$$

Para $x^2 + 3x - 4 = 0$ $\quad S = \{-4, 1\}$

Ejemplo 3

Para determinar el conjunto de solución de $x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \,.\, 1.\, 4$

$\Delta = 16 + 16$

$\Delta = 0$

Como es igual a cero, tiene una solución por lo tanto, utilizamos una formula

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{0}}{2.1}$$

$$x_1 = 2$$

Para $x^2 - 4x + 4 = 0$ $\quad S = \{2\}$

Ejemplo 4

Para determinar el conjunto de solución de $x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \,.\, 1.\, 1$

$\Delta = 16 - 4$

$\Delta = 12$

Ya que el discriminante es positivo, tenemos dos soluciones reales

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2.1} \qquad x_2 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2.1}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \qquad x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

Para $x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad S = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

Nota: Si el discriminante nos da como resultado un número negativo, no es necesario aplicar la formula.

La formula general establece las raíces de cualquier ecuación cuadrática, pero es bueno saber que:

- Cuando la ecuación está incompleta de la forma $ax^2+c=0$, el conjunto de solución está dado por la formula $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$, cuando a y c son de diferente signo, y no tiene soluciones reales si son del mismo signo.

Ejemplo 5

Para $x^2-9=0$ $\quad S=\{-3,3\}$ puesto que $x=\pm\sqrt{\frac{-(-9)}{1}}$

$x=\pm 3$

- Cuando la ecuación esta incompleta en la forma $ax^2+bx=0$, el conjunto de solución esta dado por un cero y el resultado de la formula $x=\frac{-b}{a}$

Es decir para $ax^2+bx=0$ el conjunto de solución $S=\left\{0,\frac{-b}{a}\right\}$

Ejemplo 6

Para $x^2+2x=0$ $\quad S=\{-2,0\}$ puesto que $x=\frac{-2}{1}$

$x=-2$

Práctica # 2

A. Determinar el conjunto de solución para cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

1) $x^2+x-6=0$	2) $3x^2-5x+2=0$
3) $5x^2+3x-2=0$	4) $x(2x-1)=1$
5) $x^2-10x+25=0$	6) $9x^2+6x+1=0$
7) $3x^2-2x+5=0$	8) $x^2-2x-2=0$
9) $15x^2-7x=4$	10) $x^2-x-6=0$
11) $m^2-4m=5$	12) $y^2-2y-3=0$
13) $x^2-2x-7=0$	14) $9x^2+42x+49=0$
15) $5x^2-3x+4=0$	16) $x^2-13x+12=0$
17) $x^2-16=0$	18) $3x^2+2x=0$
19) $4x^2-25=0$	20) $2x^2-3x=0$
21) $x^2-36=0$	22) $5x^2-10x=0$
23) $x^2+4=0$	24) $x^2-7x=0$

BIBLIOGRAFIA.

- Ávila Herrera, Juan Félix Algebra y Trigonometría, Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1988.
- Baldor, Aurelio Algebra Elemental , 1969.
- Howard E. Taylor y Thomas L. Wade, Matemáticas básicas con Vectores y Matrices, 1980.
- Reinaldo Jiménez Santamaría, Introducción a la Teoría de las Funciones, Serigrafiaos, 2003
- Robert T. Simita – Roland B. Minton, Cálculo, Editorial MCGRAW-HILL, 2000.
- Roxanna Meneses Rodríguez, Enseñanza y Aprendizaje, 10mo. 1991.
- Valverde Fallas, Luis Matemática Elemental con Aplicaciones, 1997.