LA DIVISIÓN SINTÉTICA

Conforme el grado de una función polinómica $P(x)$ crece, el problema de evaluar $P(r)$ se vuelve tedioso, debido a que debemos encontrar y combinar potencias altas de *r*. Una técnica rápida para dividir un polinomio entre un factor lineal es la que se conoce como división sintética, la que combinada con el teorema del residuo, facilita el encontrar $P(r)$.

Ejemplo 1:

(a) Divida a $3x^3-7x^2-x-2$ entre $x-3$
(b) Use este problema para desarrollar el método de división sintética.

Solución:

(a) Usando la división larga, tenemos:

$$\begin{array}{cccc|l}
3x^3 & -7x^2 & -x & -2 & x-3 \\ \cline{5-5}
3x^3 & -9x^2 & & & 3x^2+2x+5 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & -x & & \\
 & 2x^2 & -6x & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x & -2 & \\
 & & 5x & -15 & \\ \cline{3-4}
 & & & 13 &
\end{array}$$

(b) El método de división sintética es el método de división larga que elimina todas las operaciones innecesarias. Primero, observe que en la división larga los coeficientes son las únicas cantidades importantes. Como las potencias de *x* no son necesarias, las omitimos y escribimos la división indicada como:

$$\begin{array}{cccc|l}
3 & -7 & -1 & -2 & -3 \\ \cline{5-5}
(3) & -9 & & & \\ \cline{1-2}
 & (2) & -1 & & \\
 & 2 & -6 & & \\ \cline{2-3}
 & & (5) & -2 & \\
 & & 5 & -15 & \\ \cline{3-4}
 & & & 13 &
\end{array}$$

Después como los coeficientes que se encuentran entre paréntesis son idénticos a los del cociente, elimine el cociente y otros términos idénticos.

$$\begin{array}{cccc|c}
(3) & -7 & -1 & -2 & -3 \\ \cline{5-5}
 & -9 & & & \\ \cline{1-2}
 & (2) & & & \\
 & & -6 & & \\ \cline{2-3}
 & & (5) & & \\
 & & & -15 & \\ \cline{3-4}
 & & & 13 &
\end{array}$$

Ahora los números que se encuentran abajo del dividendo se pueden escribir en dos líneas de la siguiente manera

$$\begin{array}{cccc|c}
(3) & -7 & -1 & -2 & -3 \\
 & -9 & -6 & -15 & \\ \cline{1-4}
 & (2) & (5) & 13 &
\end{array}$$

Todos los coeficientes del cociente aparecen debajo de la línea excepto el primero.
Por consiguiente, lo escribimos debajo la línea. Siempre se hace lo mismo con el primer coeficiente del dividendo.

$$\begin{array}{cccc|c}
3 & -7 & -1 & -2 & -3 \\
 & -9 & -6 & -15 & \\ \cline{1-4}
3 & 2 & 5 & 13 &
\end{array}$$

Después de bajar el primer cociente, observemos que: $3(-3) = -9$. Al restar -9 de -7 se obtiene 2. $2(-3) = -6$. Al restar -6 de -1 se obtiene 5. $5(-3) = -15$. Al restar -15 de -2 se obtiene 13.

En cada una de estas operaciones, restamos la segunda línea a la primera. Al cambiar el signo al divisor podemos sumar los términos en lugar de sustraerlos.

Por lo tanto, todo el esquema adquiere un aspecto sintético. Ahora el problema original de división se puede efectuar y escribirse como:

$$\begin{array}{cccc|c}
3 & -7 & -1 & -2 & 3 \\
 & 9 & 6 & 15 & \\ \cline{1-4}
3 & 2 & 5 & 13 &
\end{array}$$

El significado de los varios coeficientes relativos al problema original se indica en seguida

$$\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c}{\underbrace{3x^3 - 7x^2 - x - 2}} & \underbrace{x-3} \\ 3 & -7 & -1 & -2 & 3 \\ & 9 & 6 & 15 & \\ \hline 3 & 2 & 5 & 13 & = \text{Residuo} \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 3x^2 + 2x + 5$$

El ejemplo anterior ilustra en método de la división sintética.

Para dividir un polinomio $P(x)$ entre $x-r$ por medio de este método, se procese así:

1. Arregle los coeficientes de $P(x)$ en orden de potencias descendentes de *x*. Recuerde que los términos faltantes tienen un coeficiente nulo.
2. Reemplace a $x-r$ por r
3. Escriba abajo el coeficiente de la potencia más alta de *x*, multiplíquelo por r y sume el resultado con el coeficiente de la siguiente potencia más alta de *x.* multiplique esta suma por r y sume con el siguiente coeficiente. Continué este proceso hasta que haya un producto sumando con el término constante.
4. El último número que aparece en el reglón inferior es el residuo. Los números que se encuentran a la izquierda del residuo son los coeficientes respectivos del cociente. Observe que el grado del cociente es uno menos que el de $P(x)$.

Ejemplo 2:

Divida a $5x^4 - 18x^2 - 6x + 3$ entre $x+2$ por medio de la división sintética.

Solución: como el divisor es $x+2$, $r=-2$. Así:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 5 & 0 & -18 & -6 & 3 & -2 \\ \cline{6-6} & -10 & 20 & -4 & 20 & \\ \hline 5 & -10 & 2 & -10 & \mathbf{23} & \end{array}$$

El cociente es $5x^3 - 10x^2 + 2x - 10$, con un residuo de 23.

Ejercicios

Efectué las divisiones indicadas en los ejercicios usando la división sintética:

1. $\left(x^2-5x+4\right)\div\left(x-4\right)$
2. $\left(x^2+7x+12\right)\div\left(x-3\right)$
3. $\left(x^3-2x^2+3x-1\right)\div\left(x-2\right)$
4. $\left(x^3+2x^2-3x+4\right)\div\left(x+1\right)$
5. $\left(x^3-3x+9\right)\div\left(x+\frac{1}{2}\right)$
6. $\left(x^3-1\right)\div\left(x+1\right)$
7. $\left(x^4-x^3+2x^2-72\right)\div\left(x-3\right)$
8. $\left(2x^3-4x^2+x-1\right)\div\left(x+2\right)$
9. $\left(8+7x-3x^5\right)\div\left(x-2\right)$
10. $\left(4x^3+x^2-16x-4\right)\div\left(x+\frac{1}{2}\right)$
11. $\left(3x^3-20x^2+23x+10\right)\div\left(x+\frac{1}{3}\right)$
12. $\left(3x^3+2x^2-4x+1\right)\div\left(x-\frac{1}{3}\right)$

Algunas soluciones:

1. $x-1$ 3. $x^2+x-4+\frac{8}{x+1}$ 5. $2x^2-8x+17-\frac{35}{x+2}$ 7. $3x^3-6x^2+8x-16+\frac{17}{x+1}$

9. x^3-2x^2+2x-1

Tomado de:

TECHNICAL MATHEMATICS, Bernard J. Rice, Jerry D. Strange, University of Dayton, 1983.