Ecuaciones Exponenciales

Ecuaciones Trascendentes: La ecuación que no se reduce a la ecuación algebraica mediante las *transformaciones algebraicas*, se llama ecuaciones trascendentes. Por transformaciones algebraicas de la ecuación $f(x) = 0$, se entiende las transformaciones siguientes:

1. la adición a ambos miembros de la ecuación una misma expresión algebraica.
2. la multiplicación de ambos miembros de la ecuación por una misma expresión algebraica.
3. la elevación de ambos miembros de la ecuación a una potencia racional.

Las ecuaciones transcendentes más simples son las trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

La Ecuación Exponencial: Se conoce como **ecuación exponencial** a una ecuacíón donde la incógnitas forman parte sólo de los exponentes de potencias para ciertas bases constantes. Usualmente la letra «x» es la incógnita, pero se puede usar cualquier letra.

Una de la ecuaciones exponenciales más simples, cuya solución se reduce a la de una ecuación algebraica, es la ecuación del tipo $a^{f(x)} = b$, pero tenemos también ecuaciones exponenciales del tipo $a^{f(x)} = b^{g(x)}$. Ejemplos:

$8^x = 512$ $\qquad$ $3^{x-1} = 2187$ $\qquad$ $6^{\frac{2}{3}-\frac{x}{3}} = 6^{\frac{x}{3}}$

Solución de las Ecuaciones Exponenciales: Existen dos métodos fundamentales de resolución de las ecuaciones exponenciales.

1. **Método de reducción a una base común**. Si ambos miembros de una ecuación se pueden representar como potencias de base común **a** , donde **a** es un número positivo, distinto de 1. Usando la propiedad

   $$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$$

   en otras palabras, los exponentes se igualan y resulta un tipo de ecuación en el cual se aplican las *transformaciones algebraicas* explicadas anteriormente.

2. **Método de logaritmización de una ecuación exponencial**. Se aplica logaritmos a conveniencia en ambos lados de la ecuación y se procede con las transformaciones algebraicas y las leyes de logaritmos conocidas.

Sin embargo, es la práctica la que nos ayudara a diferenciarlas y la solución será mucho más fácil cada vez que resolvamos la siguiente ecuación. Además, toda solución debe probarse en la ecuación original, debido a que a veces en el procedimiento se introducen operaciones que agregan raíces extrañas.

Ejercicios 1

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales, usando leyes de exponentes. Las respuestas están redondeadas a dos decimales.

1. $2^x = 16$ $\quad x = 4$
2. $5^x = 15625$ $\quad x = 6$
3. $3^x = 243$ $\quad x = 5$
4. $6^x = 1$ $\quad x = 0$
5. $8^{3x-1} = 1$ $\quad x = \frac{1}{3}$
6. $7^{x+2} = 343$ $\quad x = 1$
7. $4^x = \frac{1}{256}$ $\quad x = -4$
8. $10^{2+x} = 1$ $\quad x = -2$
9. $2^{-x} = 8$ $\quad x = -3$
10. $3^{2-x} = 1$ $\quad x = 2$
11. $3^{2x} = 6561$ $\quad x = 4$
12. $5^{2x-1} = 125$ $\quad x = 2$
13. $3^{x+1} = 729$ $\quad x = 5$
14. $5^{x-2} = 625$ $\quad x = 6$
15. $3^{2x-1} = 2187$ $\quad x = 4$
16. $9^{2x+1} = 729$ $\quad x = 1$
17. $5^{x+1} = 0,2$ $\quad x = -2$
18. $10^{4x+6} = 1$ $\quad x = \frac{-3}{2}$
19. $2^x \cdot 2^{x+1} = 32$ $\quad x = 2$
20. $3^x \cdot 3^{2x-3} = 3^5$ $\quad x = \frac{8}{3}$
21. $27^{x-1} = 9^{x+3}$ $\quad x = 9$
22. $2^{1-x} = 4^{2x}$ $\quad x = \frac{1}{5}$
23. $2^{x^2-3x} = 16$ $\quad x = 4, x = -1$
24. $5^{x^2-3x} = 625$ $\quad x = 4, x = -1$
25. $2^{-1-x^2} = \frac{1}{32}$ $\quad x = 2$ y $x = -2$
26. $11^{x^2-3x-37} = 1331$ $\quad x = 8$ y $x = -5$

27. $6^{x^2+7x+9} = \frac{1}{6}$ $\qquad x = -2, x = -5$

28. $5^{x^2-2x+4} = 125$ $\qquad x = 1$

29. $\sqrt{3^{5x-11}} = 9$ $\qquad x = 3$

30. $\sqrt[4]{4^{x+3}} = 4$ $\qquad x = 1$

31. $\sqrt[3]{5^{2x+8}} = 25$ $\qquad x = -1$

32. $\sqrt{2^{5x-7}} = \sqrt{2^{x-2}}$ $\qquad x = 1{,}25$

33. $\sqrt{2^{x+5}} = \sqrt[3]{4^{x+2}}$ $\qquad x = 7$

34. $\sqrt[3]{10^{2x+7}} = \sqrt{100^{x-1}}$ $\qquad x = 10$

35. $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 7$ $\qquad x = 1$

36. $2^{2x+2} + 2^{x+3} = 320$ $\qquad x = 3$

37. $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$ $\qquad x = 3$

38. $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 2^4 = 0$ $\qquad x = 3$ y $x = 1$

39. $\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$ $\qquad x = 6{,}16$

40. $e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$ $\qquad x = 0$ y $x = 0{,}69$

Ejercicios 2

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales aplicando las propiedades de los logaritmos. Las respuestas están redondeadas a dos decimales.

1. $5^x = 3$ $\qquad x = 0{,}68$

2. $7^x = 512$ $\qquad x = 3{,}21$

3. $0{,}2^x = 0{,}0016$ $\qquad x = 4$

4. $9^x = 0{,}576$ $\qquad x = -0{,}25$

5. $2^x = 3$ $\qquad x = 1{,}5$

6. $4^x = 3$ $\qquad x = 0{,}79$

7. $10^x = 7$ $\qquad x = 0{,}85$

8. $10^x = 6$ $\qquad x = 0{,}78$

9. $27 = 2^{3x}$ $\qquad x = 1{,}58$

10. $3^x = 21$ $\qquad x = 2{,}77$

11. $5^x = 8$ $x = 1{,}29$
12. $(\frac{1}{3})^x = 100$ $x = -4{,}19$
13. $3^{1-x} = 5$ $x = -0{,}46$
14. $2^{3x+1} = 128$ $x = 2$
15. $11^{2x} = 915$ $x = 1{,}42$
16. $2^{1+x} = 3$ $x = 0{,}58$
17. $7^{x+1} = 2^x$ $x = -1{,}56$
18. $2^{x-5} = 3^5$ $x = -8{,}62$
19. $10^{x^2} = 2^x$ $x = 0$ y $x = 0{,}3$
20. $8^x = 10^x$ $x = 0$
21. $5^{2x+1} = 6^{x-2}$ $x = -3{,}64$
22. $3^{x+4} = 2^{1-3x}$ $x = -1{,}16$
23. $3^{4-x} = 5$ $x = 2{,}55$
24. $5 \cdot 3^{2x} = 2$ $x = -0{,}42$
25. $2 \cdot 3^x = 7$ $x = 1{,}14$
26. $2^{t+3} = 3^{t-1}$ $t = 7{,}39$
27. $3^x \cdot 2^{2x+1} = 10$ $x = 0{,}65$
28. $3^{5x} = 2^{7x}$ $x = 0$
29. $100^{x+1} = 20^x$ $x = -2{,}86$
30. $\ln e^x = \ln e^2$ $x = 2$
31. $e^{ln\ x^2} = e^{ln\ 49}$ $x = 7$ y $x = -7$
32. $ln\ e^{x^2+21} = ln\ e^{10x}$ $x = 3$ y $x = 7$
33. $5^{m-4} = 2^{m-1}$ $m = 6{,}27$
34. $3^{3y+1} = 7^{4y}$ $y = 0{,}24$
35. $e^{x+1} = 2e^{2x}$ $x = 0{,}31$
36. $e^{5x-13} = 4e^{4x}$ $x = 14{,}39$
37. $e^{x+3} = 10e^{2x}$ $x = 0{,}7$
38. $e^{x^2-1} = 7e^{x^2+x}$ $x = -2{,}95$
39. $4e^{3x+1} = \frac{1}{2}e^{x+11}$ $x = 7{,}23$
40. $0{,}25e^{7x-4} = 0{,}2e^{2x+5}$ $x = 7{,}17$

Bibliografía

[1] Kalnin, R.A. Algebra y Funciones Elementales. Editorial Mir, Moscú.

[2] Negro, Adolfo y otros. Hacia la Matemática. Tomo 2.

[3] Rice, Bernard J. y Jerry D. Strange. Matemáticas Técnicas. Editorial CECSA.

[4] Swokowski, Earl. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.

[5] Tsipkin, A.G. Manual de Matemáticas para la Enseñanza Media.