

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

OBJETIVO

Resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables, para aplicarlos en la solución de ejercicios y de problemas extraídos de la cultura cotidiana y sistemática.

Una ecuación polinomial de grado uno, puede ser escrita en la forma,

$$ax = b, \quad a \neq 0$$

donde a y b son números reales, se llama ecuación de primer grado en «x». El conjunto de solución esta formado de un solo número, a saber; $S = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$.

Un ejemplo sencillo sería, $4x = 20$, donde la solución es;

$$S = \left\{ \frac{20}{4} \right\} = \{5\}.$$

Una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son números reales, además a, b no son ambos cero, se llama **ecuación de primer grado con dos variables**: «x», y «y».

El conjunto de solución, o simplemente la solución, de la ecuación anterior es el conjunto de parejas ordenadas

$$S = \{(x, y)\}$$

DEFINICIÓN

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos variables «x», y «y» consta de dos ecuaciones del tipo

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2\end{aligned}$$

de donde a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , y c_2 son números reales. La solución del sistema definido por las dos ecuaciones anteriores es el conjunto de los valores «x», y «y» que satisfacen ambas ecuaciones.

El teorema que sigue nos aclara más sobre las soluciones:

TEOREMA

Dado un sistema de ecuaciones en dos variables; uno y sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero:

- i) El sistema tiene exactamente una solución.
- ii) El sistema tiene un número infinito de soluciones.
- iii) El sistema no tiene soluciones.

El primer caso se llama **sistema consistente** y la solución es un par ordenado de la forma (x,y), que representa la intersección de las dos rectas en el plano cartesiano.

El segundo caso se dice que las **ecuaciones son dependientes** y las rectas son equivalentes.

En el tercer caso se dice que el **sistema es inconsistente**, y gráficamente las dos rectas son paralelas.

Para efectos de este artículo el segundo y el tercer caso se tomarán como **sin solución**, esto a que sólo nos interesa los casos en que hay intersección.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN QUE SE RESUELVEN POR SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTANEAS DE 2X2

PROBLEMA 1

La diferencia de dos números es 14, y $\frac{1}{4}$ de su suma es 13. Hallar los números.

SOLUCIÓN:

Sea

$x =$ el número mayor,

$y =$ el número menor.

Según el problema la diferencia de dos números es igual a 14, se escribe $x - y = 14$.

Así, $\frac{1}{4}(x + y) = 13$, sería $\frac{1}{4}$ de suma $(x + y)$ es igual a 13.

Da tal manera que las ecuaciones simultaneas son:

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ \frac{1}{4}(x + y) = 13 \end{cases}$$

Despejando y ordenado términos, tenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ x + y = 52 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos: $x = 33$ y $y = 19$.

Ahora bien, es recomendable sustituir los valores de $x = 33$ y $y = 19$ en las ecuaciones simultaneas para comprobar que están correctas.

$$\begin{cases} 33 - 19 = 14 \\ 33 + 19 = 52 \end{cases}$$

EJERCICIO 1

1. La diferencia de dos números es 40, y $\frac{1}{8}$ de su suma es 11. Hallar los números.

Resp: $x=64$ y $y=24$.

2. La suma de dos números es 190 y $\frac{1}{9}$ de su diferencia es 2. Hallar los números.

Resp: $x=104$ y $y=86$.

3. La suma de dos números es 1529 y su diferencia es 101. Hallar los números.

Resp: $x=815$ y $y=714$.

4. Un cuarto de la suma de dos números es 45 y un tercio de su diferencia es 4. Hallar los números.

Resp: $x=96$ y $y=84$.

5. Los $\frac{2}{3}$ de la suma de dos números son 74 y los $\frac{3}{5}$ de su diferencia es 9. Hallar dichos números.

Resp: $x=63$ y $y=48$.

6. Los $\frac{3}{10}$ de la suma de dos números exceden en 6 a 39 y los $\frac{5}{6}$ de su diferencia son 1 menos que 26. ¿ Qué números son ?

Resp: $x=90$ y $y=60$.

7. Un tercio de la diferencia de dos números es 11 y los $\frac{4}{9}$ del mayor equivalen a los $\frac{3}{4}$ del menor. Hallar los números.

Resp: $x=81$ y $y=48$.

8. Dividir 80 en dos partes tales que los $\frac{3}{8}$ de la parte mayor equivalgan a los $\frac{3}{2}$ de la menor.

Resp: $x=64$ y $y=16$.

9. Hallar dos números tales que 5 veces el mayor exceda a $\frac{1}{5}$ del menor en 222 y 5 veces el menor exceda a $\frac{1}{5}$ del mayor en 66.

Resp: $x=45$ y $y=15$.

PROBLEMA 2

6 libras de café y 5 libras de azúcar costaron 2270 colones y 5 libras de café y 4 de azúcar costaron 1880 colones. Hallar el precio de una libra de café y una de azúcar si los precios no han cambiado.

SOLUCIÓN:

Sea, x =precio de 1 libra de café en colones, y sea y =precio de 1 libra de azúcar en colones.

Si una libra de café cuesta « x », 6 libras costarán « $6x$ »; si una libra de azúcar cuesta « y », 5 libras de azúcar costarán « $5y$ », y como el importe de esta compra fue de 2270 colones, tendremos:

$$6x + 5y = 2270$$

Si 5 libras de café cuestan « $5x$ », y 4 de azúcar, « $4y$ », y como el pago de esta compra fue de 1880 colones, tendremos:

$$5x + 4y = 1880$$

Reuniendo las ecuaciones, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 2270 \\ 5x + 4y = 1880 \end{cases}$$

Luego, $x=320$ y $y=70$. La libra de de café costo 320 colones y una libra de azúcar, 70 colones.

De nuevo recomendamos sustituir en el sistema de ecuaciones para comprobar que los resultados cumplen con las igualdades.

$$\begin{cases} 6 \cdot 320 + 5 \cdot 70 = 2270 \\ 5 \cdot 320 + 4 \cdot 70 = 1880 \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Una cuerda mide 12 metros, se corta en dos partes de tal manera que una mide 2 metros más grande que la otra. ¿Cuáles son las nuevas medidas de las cuerdas ?

SOLUCIÓN:

x =longitud de la pieza más grande, y =longitud de la pieza más corta.

Observemos que « x » y « y » deben satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

La respuesta es que $x=7$ y $y=5$. Las dos piezas deben sumar 12, lo cual es correcto $7+5$, y al mismo tiempo $x-y=7-5=2$.

EJERCICIO 2

- 5 trajes y 3 de sombreros cuestan 4180 colones, y 8 trajes y 9 sombreros 6940 colones. Hallar el precio de un traje y de un sombrero.
Resp: $x=800$ y $y=60$.
- 6 libras de té y 5 de café cuestan \$9.85. 7 libras de té y 8 de café cuestan \$ 13.55. Encontrar el precio por libra de cada una.
Resp: $x=0,85$ y $y=0,95$.
- Un hacendado compro 4 vacas y 7 caballos por 514000 y más tarde, a los mismos precios, compro 8 vacas y 9 caballos por 818000. Hallar el precio de una vaca y un caballo.
Resp: $x=5500$ y $y=4200$.

4. En un cine, 10 entradas de adulto y 9 de niños cuestan 51200, y 17 de niños y 15 de adulto 83100. Hallar el precio de cada entrada.
Resp: $x=3500$ y $y=1800$.
5. El precio del boleto para cierto evento es de 225 colones para no estudiantes, y 150 colones para estudiantes. Se venden 450 boletos por un total de 77 775 colones. ¿ cuántos boletos de cada tipo se compraron ?
Resp: $x=137$ y $y=313$.
6. Una línea aérea vuela de la ciudad A hasta la ciudad C, con una escala en ciudad B. La tarifa a la ciudad B es de 4500 colones, mientras que el pasaje a la ciudad C vale 6000 colones. En la ciudad A abordaron el avión 185 pasajeros y la compañía recibió un total de 1 050 000 colones. ¿ cuántos pasajeros viajaron a la ciudad B y a la C.
Resp: $x=40$ y $y=145$.
7. Cierta compañía emplea 53 personas en dos sucursales. De esta gente, 21 son universitarios graduados. Si una tercera parte de las personas que laboran en la primera sucursal y tres séptimos de los que se encuentran en la segunda sucursal son universitarios graduados , ¿ cuántos empleados tiene cada sucursal ?
Resp: $x=18$ y $y=35$.
8. Una pequeña fábrica de muebles produce sofás y sillones reclinables. Cada sofá requiere de 8 horas de trabajo y \$ 60 de material, mientras que un sillón reclinable puede hacerse por \$ 35 en 6 horas. La compañía dispone de 340 horas de trabajo por semana y puede pagar \$ 2 250 de material. ¿ Cuántos sofás y sillones reclinables pueden producirse si se utilizan todas las horas de trabajo y todos los materiales ?
Resp: $x=20$ y $y=30$.

9. Si a cinco veces el mayor de dos números se añade 7 veces el menor, la suma es 316, y si a 9 veces el menor se resta el cuádruplo del mayor la diferencia es 83. Hallar los números.
Resp: $x=31$ y $y=23$.
10. Los $\frac{3}{7}$ de la edad de A aumentados en los $\frac{3}{8}$ de la edad de B suman 15 años y los $\frac{2}{3}$ de la edad de A disminuido en los $\frac{3}{4}$ de la de B equivalen a 2 años. Hallar ambas edades.
Resp: $x=21$ y $y=16$.
11. El doble de la edad de A excede en 50 años a la edad de B, y $\frac{1}{4}$ de la edad de B es 35 años menos que la edad de A. Hallar ambas edades.
Resp: $x=45$ y $y=40$.
12. La edad de A excede en 13 años a la de B, y el duplo de la edad de B excede en 29 años a la edad de A. Hallar ambas edades.
Resp: $x=55$ y $y=42$.
13. Si $\frac{1}{5}$ de la edad de A se aumente en los $\frac{2}{3}$ de la edad de B, el resultado sería 37 años, y $\frac{5}{12}$ de la edad de B equivalen a $\frac{3}{13}$ de la edad de A. Hallar las edades correspondientes.
Resp: $x=65$ y $y=36$.

PROBLEMA 4

Si a los dos términos de una fracción se añade 3, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$. Hallar la fracción.

SOLUCIÓN:

Sea

x=el numerador,
y=el denominador.

Entonces, $\frac{x}{y}$, es la fracción buscada.

Añadiendo 3 a cada término se convierte en $\frac{x+3}{y+3}$, y según los datos del problema el valor de esta fracción es $\frac{1}{2}$; luego:

$$\frac{x+3}{y+3} = \frac{1}{2}$$

Restando 1 a cada término, la fracción se convierte en $\frac{x-1}{y-1}$, y según los datos el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$; luego:

$$\frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{3}$$

Reuniendo estas dos ecuaciones tenemos el sistema,

$$\begin{cases} \frac{x+3}{y+3} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Despejando y reagrupando términos, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Encontramos que $x=5$ y $y=13$. Por tanto, la fracción buscada es $\frac{x}{y} = \frac{5}{13}$.

EJERCICIOS 3

1. Si a los dos términos de una fracción se anade 1, el valor de la fracción es $\frac{2}{3}$, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción.

Resp: $x=3$ y $y=5$.

2. Si a los dos términos de una fracción se resta 3, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$, y si los dos términos se aumentan en 5, el valor de la fracción es $\frac{3}{5}$. Hallar la fracción.

Resp: $x=7$ y $y=15$.

3. Si al numerador de una fracción se añade 5, el valor de la fracción es 2, y si al numerador se resta 2, el valor de la fracción es 1. Hallar la fracción.

Resp: $x=9$ y $y=7$.

4. Si al numerador de una fracción se aumenta en 26, el valor de la fracción es 3, y si el denominador se disminuye en 4, el valor es 1. Hallar la fracción.

Resp: $x=7$ y $y=11$.

5. Añadiendo 3 al numerador de una fracción y restando 2 al denominador, la fracción se convierte en $\frac{6}{7}$, pero si se resta 5 al numerador y se añade 2 al denominador, la fracción equivale a $\frac{2}{5}$. Hallar dicha fracción.

Resp: $x=15$ y $y=23$.

6. Multiplicando por 3 el numerador de una fracción y añadiendo 12 al denominador, el valor de la fracción es $\frac{3}{4}$, y si el numerador se aumenta en 7 y se triplica el denominador, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la correspondiente fracción.

Resp: $x=5$ y $y=8$.

7. Si el numerador de una fracción se aumenta en $\frac{2}{5}$, el valor de la fracción es $\frac{4}{5}$, y si el numerador se disminuye en $\frac{4}{5}$, el valor de la

fracción es $\frac{2}{5}$. Hallar la fracción.

Resp: $x=2$ y $y=3$.

PROBLEMA 5

Un bote que navega por un río recorre 15 kilómetros en 1,5 horas a favor de la corriente y 12 kilómetros en 2 horas contra la corriente. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.

SOLUCIÓN:

Sea

x =velocidad en km por hora, del bote en agua tranquila,
 y =velocidad en km por hora, del río.

Entonces, $x+y$ =velocidad del bote a favor de la corriente,
 $x-y$ =velocidad del bote contra la corriente.

Ahora bien, el tiempo es igual a la distancia recorrida dividido por la velocidad;

$$t = \frac{d}{v}$$

El tiempo empleado en recorrer 15 km a **a favor de la corriente**, es 1,5 horas, como « $x+y$ » es la velocidad, tenemos;

$$\frac{15}{x+y} = 1,5$$

El tiempo empleado en recorrer la distancia de 12 km **contra la corriente**, es 2 horas, con « $x-y$ » como velocidad contra la corriente;

$$\frac{12}{x-y} = 2$$

Reuniendo estas dos ecuaciones tenemos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{15}{x+y} = 1,5 \\ \frac{12}{x-y} = 2 \end{cases}$$

Despejando y ordenando, el sistema equivalente al anterior es,

$$\begin{cases} 1,5x + 1,5y = 15 \\ 2x - 2y = 12 \end{cases}$$

Resolviendo se halla $x=8$ y $y=2$; luego, la velocidad del bote en aguas tranquilas es $8\frac{km}{h}$, y la velocidad del río, $2\frac{km}{h}$.

EJERCICIO 4.

1. Un hombre rema río abajo 10 km en una hora y río arriba 4 km en 1 hora. Hallar la velocidad del bote en aguas tranquilas y la velocidad del río.
Resp: $x=7$ y $y=3$.
2. Una tripulación rema 28 km en 1,75 horas río abajo y 24 km en 3 horas río arriba. Hallar la velocidad del bote y la del río.
Resp: $x=12$ y $y=4$.
3. Una tripulación emplea 2,5 horas en recorrer 40 km río abajo y 5 horas en el regreso. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.
Resp: $x=12$ y $y=4$.
4. Un bote le toma 8 horas en recorrer 80 km corriente arriba y 5 horas el regreso a su punto de partida. Encuentre la velocidad del bote en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.
Resp: $x=13$ y $y=3$.

5. Una lancha de motor hizo un viaje de 4 km contra la corriente en 0,25 horas,. El viaje de regreso a favor de la corriente lo hizo en 0,2 horas. Calcular la velocidad de la corriente del río y la velocidad de la lancha.

Resp: $x=18$ y $y=2$.

6. Un hombre rema 500 metros contra una corriente constante en 10 minutos. Después rema a favor de la corriente, cubriendo 300 metros en 5 minutos. Encuentre las dos velocidades; la del bote y la del río.

Resp: $x=55$ y $y=5$.

7. Un avión viaja 1200 km en 2 horas volando a favor del viento. El viaje de regreso, contra la corriente, la toma 2,5 horas. Encuentre la velocidad del avión y la del viento.

Resp: $x=540$ y $y=60$.

Bibliografía

- [1] Arya, Jagdish y Robin Lardner. Matemáticas Aplicadas a la administración y a la economía.
- [2] Baldor, Aurelio. Algebra Elemental.
- [3] Barnett, Raymond. y otros. Precálculo, funciones y gráficas.
- [4] Swokowski,Earl. Algebra y Trigonometría con geometría analítica.
- [5] Taylor, Howard y Thomas Wade. Matemáticas Básicas con vectores y matrices.