

# ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA VARIABLE

## OBJETIVO

*Resolver ecuaciones de segundo grado con una variable, para aplicarlos en la solución de ejercicios y de problemas extraídos de la cultura cotidiana y sistemática.*

## DEFINICIÓN Ecuación Cuadrática

Una ecuación cuadrática con una variable es cualquier ecuación que se pueda escribir en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0$$

donde  $x$  es una variable y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales.

## PROBLEMAS DE APLICACIÓN QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

### PROBLEMA 1

A es dos años mayor que B y la suma de los cuadrados de ambas edades es 130 años. Hallar ambas edades.

SOLUCIÓN:

Sea

$$\begin{aligned}x &= \text{la edad de A,} \\x - 2 &= \text{la edad de B.}\end{aligned}$$

Según las condiciones del problema,

$$x^2 + (x - 2)^2 = 130$$

Simplificando, se obtiene

$$x^2 - 2x - 63 = 0$$

La solución de la ecuación es  $S = \{9, -7\}$

De acuerdo al problema el valor  $x = -7$ , obviamente no tiene sentido, pues estamos hablando de edades.

Luego, la edad de A es 9 y la de B es 7 años.

Ahora bien, es recomendable sustituir el valor de  $x = 9$  en la ecuación para comprobar que es correcta la igualdad.

$$9^2 + (9 - 2)^2 = 130$$

## **EJERCICIO 1**

---

1. La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados es 53. Hallar los números.  
Respuesta: 7 y 2.
2. Encuentre dos números tales que su suma sea 21 y su producto 104.  
Respuesta: 13 y 8.
3. Encuentre dos números consecutivos positivos enteros pares cuyo producto es 168.  
Respuesta: 12 y 14.
4. La suma de un número y su recíproco es  $\frac{10}{3}$ . Encuentre el número.  
Respuesta: 3.
5. Un número positivo es los  $\frac{3}{5}$  de otro y su producto es 2160. Hallar los números.  
Respuesta: 60 y 36.
6. A tiene 3 años más que B y el cuadrado de la edad de A aumentado en el cuadrado de la edad de B equivale a 317 años. Hallar ambas edades.  
Respuesta: 14 y 11.

7. Un número es el triplo de otro y la diferencia de sus cuadrados es 1800.  
Hallar los números.  
Respuesta: 45 y 15.
8. El cuadrado de un número disminuido en 9 equivale a 8 veces, el número menos 2. Hallar el número.  
Respuesta: 7 y 1.
9. Hallar dos números consecutivos tales que el cuadrado del mayor excede en 57 al triplo del menor.  
Respuesta: 8 y 9 ó -7 y -6.
10. La diferencia de dos números es 7 y su suma multiplicada por el número menor equivale a 184. Hallar los números.  
Respuesta: 15 y 8.
11. La suma de las edades de A y B es 23 años y su producto 102. Hallar ambas edades.  
Respuesta: 17 y 6.
12. Hallar tres números consecutivos tales que el cociente del mayor entre el menor equivale a los  $\frac{3}{10}$  del número intermedio.  
Respuesta: 4, 5 y 6.
13. El producto de dos números es 180 y su cociente es 1,25. Hallar los números.  
Respuesta: 12 y 15.
14. El producto de dos números es 352, y si el mayor se divide por el menor el cociente es 2 y el residuo es 10. Hallar los números.  
Respuesta: 11 y 32.
15. La edad de A hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años. Hallar la edad.  
Respuesta: 10.

**PROBLEMA 2**

El señor A compró cierto número de sacos de frijoles por \$240. Si hubiera comprado 3 sacos más por el mismo dinero, cada saco le habría costado \$4 menos. ¿ Cuántos sacos compró y a qué precio ?

SOLUCIÓN:

Sea  $x$ =el numero de sacos que compro.

Si compró  $x$  sacos por \$240, cada saco le costo  $\$ \frac{240}{x}$ .

Si hubiera comprado 3 sacos más,  $x+3$  por el mismo dinero \$240, cada saco saldría a  $\$ \frac{240}{x+3}$ .

Pero según las condiciones el precio de cada uno de estos sacos,  $\$ \frac{240}{x+3}$ , sería \$4 menos que el precio de cada uno de los sacos anteriores,  $\frac{240}{x}$ ; luego, se tiene la ecuación:

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x+3} + 4$$

Simplificando y ordenando, tenemos;

$$4x^2 + 12x - 720 = 0$$

Resolviendo esta expresión se obtiene  $x=12$  y  $x=-15$ .

Se rechaza la solución  $x=-15$  y se acepta  $x=12$ ; finalmente, compró 12 sacos y cada uno le costo  $\frac{240}{12}=\$20$ .

**PROBLEMA 3**

El largo de un terreno rectangular es el doble que el ancho. Si el largo se aumenta en 40m y el ancho en 6m, el área se hace el doble. Hallar las dimensiones del terreno.

SOLUCIÓN:

Sea,

$x$ =el ancho del terreno,  
 $2x$ = el largo del terreno.

Entonces, el área del terreno es  $x \cdot 2x = 2x^2$ .

Aumentando el largo en 40m, éste sería  $(2x+40)$ m, y aumentando el ancho en 6m, éste sería  $(x+6)$ m. El área ahora sería  $(2x + 40)(x + 6) = 2x^2 + 52x + 240$ .

De acuerdo a los datos del problema esta nueva área sería el doble que la anterior  $2x^2$ ; luego, tenemos la ecuación:

$$2x^2 + 52x + 240 = 2(2x^2)$$

Trasponiendo y reduciendo:

$$-2x^2 + 52x + 240 = 0$$

Resolviendo esta ecuación se halla que  $x=-4$  y  $x=30$ .

Aceptando la solución  $x=30$ , de tal manera que el ancho del terreno es 30m y el largo es 60m.

## EJERCICIO 2 ---

1. Un comerciante compró cierto número de sacos de azúcar por \$1000. Si hubiera comprado 10 sacos más por el mismo dinero, cada saco le habría costado \$5 menos. ¿ Cuántos sacos compró y cuántos le costo cada uno ?

Respuesta: 40 y 25.

2. Un caballo costó 4 veces lo que su arreos y la suma de los cuadrados del precio del caballo y el precio de los arreos es 860625 colones. ¿ Cuánto costó el caballo y cuánto los arreos ?

Respuesta: 225 y 900.

3. Una persona compró cierto número de libros por \$180. Si hubiera comprado 6 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado \$1 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto le costo cada uno ?  
Respuesta: 36 y 5.
4. Una compañía de 180 soldados está formada en filas. El número de soldados de cada fila es 8 más que el número de filas que hay. ¿ Cuántas filas y cuántos soldados en cada una ?  
Respuesta: 10 y 18.
5. Entre cierto número de personas compran un auto que vale \$1200. El dinero que paga cada persona excede en 194 al número de personas. ¿ Cuántas personas compraron el auto ?  
Respuesta: 6.
6. Compré cierto número de relojes por \$192. Si el precio de cada reloj es los  $\frac{3}{4}$  del número de relojes, ¿ cuántos relojes compré y cuánto pagé por cada uno ?  
Respuesta: 16 y 12.
7. Se ha comprado cierto número de libros por \$150. Si cada libro hubiera costado \$1 más, se habrían comprado 5 libros menos con los \$150. ¿ Cuántos libros se compraron y cuánto costo cada uno ?  
Respuesta: 30 y 5.
8. Por \$200 compré ciertos números de libros. Si cada libro me hubiera costado \$10 menos, el precio de cada libro hubiera sido igual al número de libros que compré. ¿ Cuántos libros compré ?  
Respuesta: 10.
9. Compre cierto número de lapiceros por \$24. Si cada lapicero me hubiera costado \$1 menos, podía haber comprado 4 lapiceros más por el mismo dinero. ¿Cuántos lapiceros compré y a qué precio ?  
Respuesta: 8 y 3.
10. Los gastos de una excursión son \$90. Si desisten de ir 3 personas, cada una de las restantes tendría que pagar \$1 más. ¿Cuántas personas van

en la excursión y cuánto paga cada una ?

Respuesta: 18 y 5.

11. Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240km. Si la velocidad hubiera sido 20km por hora más que la que llevaba hubiera tardado 2 horas menos en recorrer dicha distancia. ¿ En que tiempo recorrió los 240km ?

Respuesta: 6.

12. Un tren ha recorrido 200km en cierto tiempo. Para haber recorrido esa distancia en 1 hora menos, la velocidad debía haber sido 10km por hora más. Hallar el tiempo empleado y la velocidad del tren.

Respuesta: 5 y 40.

#### PROBLEMA 4

Se va a fabricar una caja de base cuadrada y sin tapa, con una hoja cuadrada de aluminio, cortando cuadrados de 3cm de cada esquina y doblando los lados. Si la caja debe tener 48 centímetros cúbicos, ¿ qué tamaño debe tener la hoja de aluminio para formar la caja ?

SOLUCIÓN:

Sea  $x$ =longitud de un lado de la hoja de aluminio.

Entonces la longitud de la base de la caja es  $(x-6)$ , ya que se le restan 3cm en cada extremo.

El área es  $(x - 6)(x - 6) = (x - 6)^2$ , y para calcular el volumen se debe multiplicar el área cuadrada por la altura de 3cm, así las cosas;

$$3(x - 6)^2 = 48$$

Formado la ecuación cuadrática

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

Se obtiene  $x=10$  y  $x=2$ , descartando el 2 ya que no se ajusta a los datos del problema. El  $x=10$  si es factible como respuesta, ya que cumple con las condiciones para armar la caja de aluminio de volumen  $48\text{cm}^3$ .

### EJERCICIOS 3

---

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5cm. Halle la medida de los catetos sabiendo que su suma es 6cm.  
Respuesta: 4,87 y 1,13.
2. Se rodea por un camino de ancho uniforme un terreno rectangular de dimensiones 26m y 30m. Se sabe que el área del camino es de  $240\text{m}^2$ . Determine el ancho del camino.  
Respuesta: 2.
3. Si la longitud el ancho de un rectángulo de 4 por 2 pulgadas se aumentan en la misma cantidad cada una, el área del nuevo rectángulo será dos veces el área original. ¿ Cuáles serán las dimensiones del rectángulo ?  
Respuesta: 5,12 y 3,12.
4. Un fabricante de envases de lata desea construir una lata cilíndrica de 20cm de altura y capacidad de 3000cm cúbicos. Encuentre el radio de la lata.  
Respuesta: 6,91.
5. Una caja sin tapa de debe construir cortando cuadrados de 3 pulgadas de una hoja de lata rectangular, cuyo largo es el doble de su ancho. ¿ Qué tamaño de la hoja producirá una caja con un volumen de 60 pulgadas cúbicas ?  
Respuesta: 16 y 8.
6. Un trozo de alambre de 100 centímetros de largo, se corta en dos y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la

suma de las 2 áreas formadas es  $397\text{cm}^2$ , encuentre la longitud de cada pedazo de alambre.

Respuesta: 76 y 24.

7. Un constructor desea usar  $6\text{m}^3$  de concreto para construir el piso de un patio rectangular. Si el largo del patio debe ser el doble del ancho y el grosor del piso debe ser de 8cm, encuentre las dimensiones del patio.

Respuesta: 6,12.

8. Un granjero intenta cercar un terreno rectangular, utilizando parte de su granero para uno de los lados y tela de alambre para los otros 3 lados. Si se desea que el lado paralelo al granero sea el doble que el lado adyacente y que el área del terreno sea de  $128\text{cm}^2$ , ¿cuántos metros de tela de alambre debe comprar ?

Respuesta: 32.

9. En una hoja de papel de 24 por 36cm se va imprimir una fotografía, con el lado menor en la parte de abajo. El margen en los lados y en la parte de arriba debe ser del mismo ancho y en el margen de abajo debe ser el doble de los otros. Halle el ancho de los márgenes si el área que se va a imprimir es de  $661,5\text{cm}^2$ .

Respuesta: 1.5 y 3.

# Bibliografía

- [1] Arya, Jagdish y Robin Lardner. *Matemáticas Aplicadas a la administración y a la economía*.
- [2] Baldor, Aurelio. *Algebra Elemental*.
- [3] Barnett, Raymond y otros. *Precálculo, funciones y gráficas*.
- [4] Swokowski, Earl. *Algebra y Trigonometría con geometría analítica*.
- [5] Taylor, Howard y Thomas Wade. *Matemáticas Básicas con vectores y matrices*.