APLICACIONES PARA LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

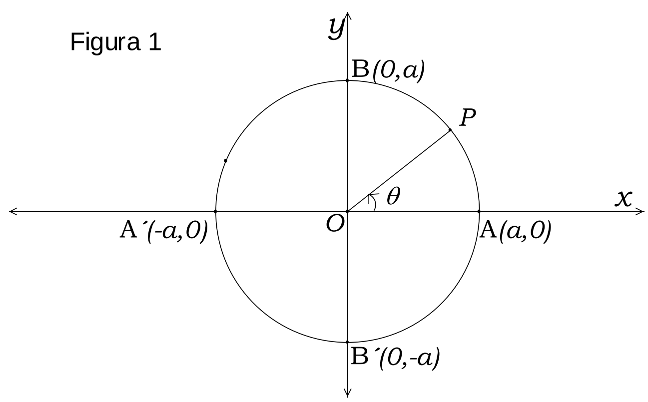
La funciones trigonometricas son útiles para estudiar un movimiento vibratorio u oscilante, como puede ser el de una partícula de una cuerda de guitarra en vibración, o un resorte que se ha comprimido o estirado, para luego soltarlo y dejarlo oscilante de un lado a otro. El tipo fundamental de desplazamiento de partículas en esos ejemplos se llama movimiento armónico.

Movimiento armónico simple, movimiento rectilíneo con aceleración variable producido por las fuerzas que se originan cuando un cuerpo se separa de su posición de equilibrio.

Un cuerpo oscila cuando se mueve periódicamente respecto a su posición de equilibrio. El movimiento armónico simple es el más importante de los movimientos oscilatorios, pues constituye una buena aproximación a muchas de las oscilaciones que se dan en la naturaleza y es muy sencillo de describir matemáticamente. Se llama armónico porque la ecuación que lo define es función del seno o del coseno.

Para ayudar a la descripción del movimiento armónico, imagínese un punto ***P*** que se mueve a velocidad constante en la circunferencia de radio ***a*** (con el sentido invariable), que aparece en la figura 1:

Figura 1



Supóngase que la posición inicial de P es A$(0,a)$, y que θ es el ángulo descrito por el segmento OP luego de haber transcurrido t unidades de tiempo. La velocidad angular ω de OP es la rapidez a la cambia el valor de θ por la unidad de tiempo. Decir que P se mueve en la circunferencia con una rapidez invariable equivale a decir que la velocidad angular ω es constante. Si así es, entonces $\theta = \omega\, t$. Por ejemplo si $\omega = \frac{\pi}{6}$ radianes, entonces $\theta = \left(\frac{\pi}{6}\right) t$.

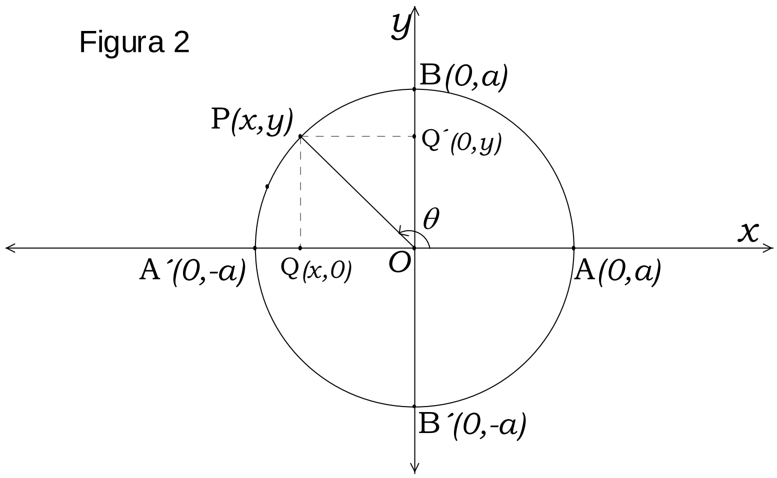
Si las coordenadas de *P* son *(x,y)*, como indica la figura 2, entonces $\cos\theta = \dfrac{x}{a}$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{a}$ y por consiguiente: $\boldsymbol{x = a\cos\theta}$ $\boldsymbol{y = a\,\mathrm{sen}\,\theta}$

Se aplica el hecho de que $\theta = \omega\, t$, *se tiene así que:*

$$x = a\cos(\omega\, t) \qquad y = a\,\mathrm{sen}(\omega\, t)$$

La dos ultimas ecuaciones especifican la posición *(x,y)* de *P* en cualquier momento *t.*

Figura 2



A continuación se considera el punto *Q(x,0)*, es decir, la **proyección de P sobre el eje x**. Ese punto se muestra en la figura 2. La posición Q esta expresada por $\boldsymbol{x = a\cos\omega\, t}$, a medida que P describe varias revoluciones, el punto Q oscila de un lado a otro, entre A(a, 0) y A´(-a, 0). Igualmente, el punto *Q´(0,y)* es la **proyección de P sobre el eje y**, y su posición está indicada por $\boldsymbol{y = a\,\mathrm{sen}\,\omega\, t}$, al moverse P en la circunferencia, Q´ oscila entre B´(0,-a) y B(0,a). los movimientos de Q y Q´ son del tipo que se describen en la siguiente definición:

*Un punto que se mueve en un eje de coordenadas tiene movimiento armónico simple si su distancia **d** desde el origen, cuando el tiempo es **t**, está determinada por:* $\boldsymbol{d = a\cos\omega\, t}$, *o bien por* $\boldsymbol{y = a\,\mathrm{sen}\,\omega\, t}$ *para números reales, a y* ω*, distintos de cero.*

Aplicaciones

1. Una rueda de 40 cm. de diámetro gira en su eje a 100 revoluciones por minuto (rpm). Si se introduce un sistema coordenado como el de la figura 2, de tal modo que P sea un punto en el borde de la rueda, Calcule

a) la velocidad angular de OP

b) la posición (x,y) de P, a los t minutos.

2. Una rueda de 2 pies de radio gira sobre su eje, y la velocidad angular de un rayo que va del centro de la rueda a un punto P, en el borde, es $\frac{5\pi}{6}$ radianes por segundo.

a) ¿Cuántas revoluciones efectúa la rueda en 10 minutos?

b) si se introduce un sistema de coordenadas como en la figura 2, determine el posición (x,y) de P, a los t segundos.

3. Para un intervalo de 45 minutos, los tsunamis cerca de Hawai, provocados por el sismo de 1960 en Chile, se pudieron representar por la ecuación $y = 8sen\frac{\pi}{6}t$, donde y está en pies y t en minutos.

a) Calcule la amplitud y el periodo de las olas

b) Si la distancia de una cresta de onda a la siguiente era de 21 km. ¿Cuál era la velocidad de la onda? Las olas de marea pueden tener velocidades de más de 700 Km. /h en aguas profundas.

Respuestas.

1. a) ω = 200 π rad/min.

   b) En cm: x = 20 cos 200 π t, y=20 sen 200π t

3. a) 8 pies; 12 min.

   b) 105 km/h

(Tomado para uso didáctico de: Algebra y Trigonometría de Swokowski, Cole. Tercera edición Grupo Editorial Iberoamérica, 1992)