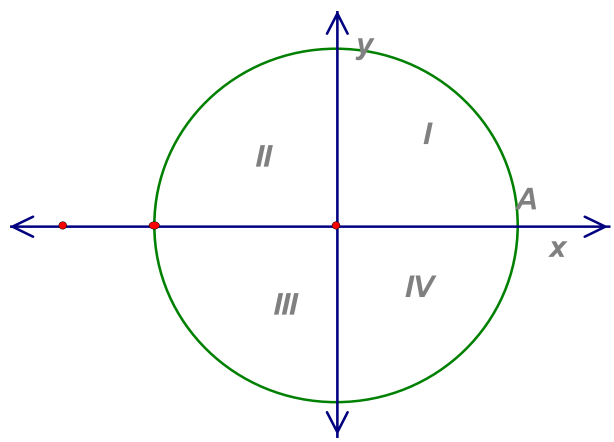
CÍRCULO-TRIGONOMÉTRICO

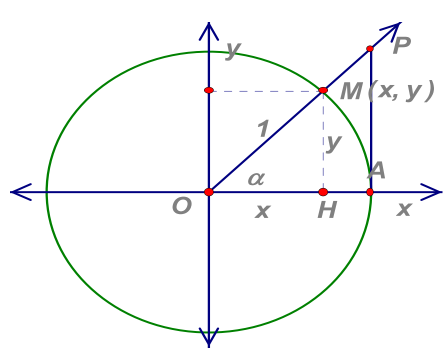
Definición:

El círculo con centro en el origen de coordenadas cuyo radio tenga por medida **la unidad** de longitud, se llamará, <u>círculo trigonométrico.</u>

Los ejes de coordenadas determinan cuatro cuadrantes en el plano y se designará con A el punto donde el círculo corta la parte positiva del eje OX.



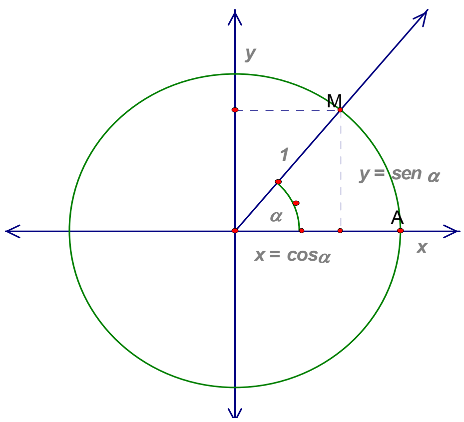
Si en el círculo trigonométrico localizamos el ángulo agudo α, tal que tenga un lado AO, en correspondencia con la parte positiva del eje X (posición normal) y el otro lado OM^1 en el cuadrante YOX, el lado OM^1 interseca al círculo trigonométrico en el punto M, cuyas coordenadas son (x, y), así podemos definir el coseno, el seno y la tangente del ángulo agudo α.

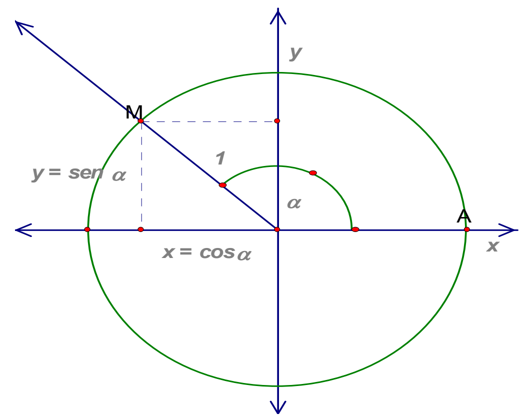


$$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x \qquad \text{sen } \alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \text{tag } \alpha = \frac{y}{x}$$

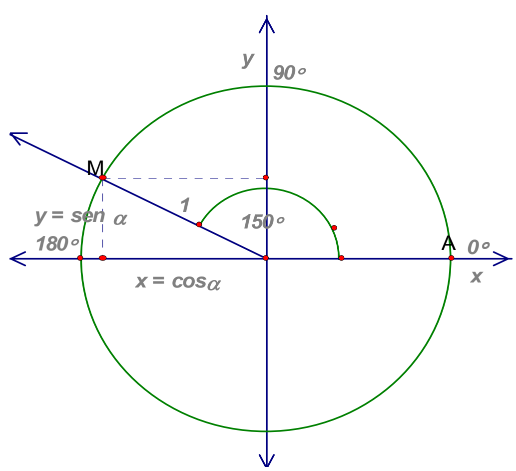
Observe que seno corresponde a la ordenada y el coseno corresponde a la abscisa.

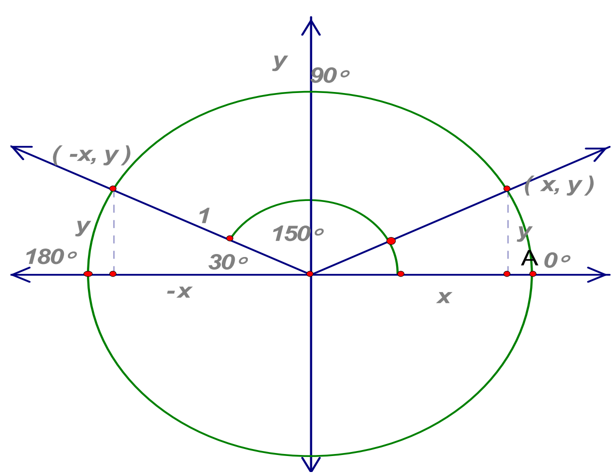
Este resultado se generaliza para cualquier ángulo en el círculo trigonométrico, con el lado OA en posición normal (estándar).
Las siguientes figuras ilustran situaciones en **I y II cuadrante**





Analicemos un ejemplo particular, un ángulo de 150º





Como $y = \text{sen } 30º$
$x = \cos 30º$ (1)

Aquí se observa que el lado terminal interseca al círculo trigonométrico en (-x, y), así que

$$y = \text{sen}150º$$
$$-x = \cos 150º \qquad (2)$$

Así que por (1) y (2) se tiene que

$y = \text{sen } 30^o = \text{sen}150^o$ $\Rightarrow$ $\text{sen } 30^o = \text{sen}150^o$
$x = \cos 30^o = -\cos 150^o$ $\qquad\qquad$ $\cos 30^o = -\cos 150^o$

o bien lo cual se puede decir que:

$\text{sen}150^o = \text{sen}(180^o - 30^o) = \text{sen } 30^o$ (esto porque el seno en el primer y segundo cuadrante son positivos).

$\cos 150^o = \cos(180^o - 30^o) = -\cos 30^o$ (esto porque el coseno en el segundo cuadrante es negativo). En general se tiene para ángulos en el II cuadrante

$$\text{sen}(180^o - A) = \text{sen } A$$

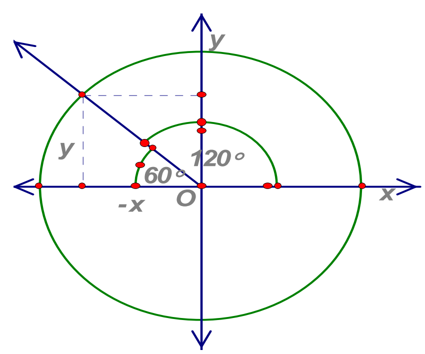
$$\cos(180^o - A) = -\cos A$$

Ejemplos:

Determine las razones trigonométricas del ángulo agudo seno, coseno , para los ángulos 120^o y 135^o.

Solución:

Para 120^o se tiene



a) $\text{sen}120^o = \text{sen}(180^o - 60^o) = \text{sen } 60^o$

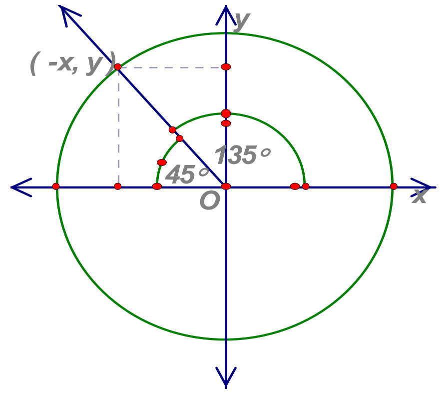
$-x = \cos 60^o = -\cos 60^o$

b) $\cos 12^o = \cos(180^o - 60^o) = -\cos 60^o$ $\qquad$ $y = \text{sen}60^o$

Para 135º se tiene

a) sen135º = sen (180º – 135º) = sen 45º -x = cos45º,

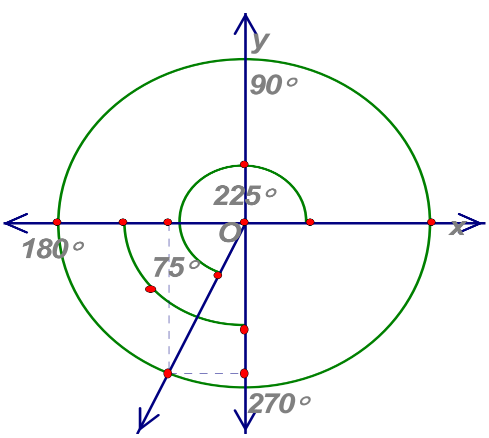
x = - cos45º

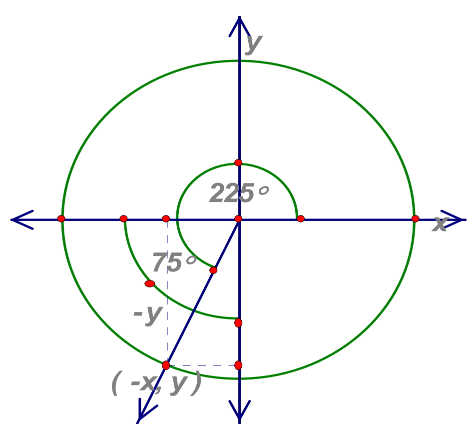


b) cos135º = cos(180º – 135º) = – cos 45º
y = sen 45º

ÁNGULOS EN EL TERCER CUADRANTE

Estudiemos éste caso con el ángulo 255º, lo cual se puede expresar como 180º + 75º, esto es:





Así y = sen 75º

x = cos 75º (1)

- y = sen 255º

- x = cos 255º (2)

lo que se deduce de (1) y (2)

sen 255º = sen (180º + 75º) = – sen75º

cos 255º = cos (180º + 75º) = – cos 75º

Lo que podemos decir que

sen(180º + A) = – sen A cos (180º + A) = – cosA

Ejemplos:
Deje en términos de los respectivos valores del seno y el coseno de un ángulo agudo los ángulos

a) 227º
b) 260º
c) 265º

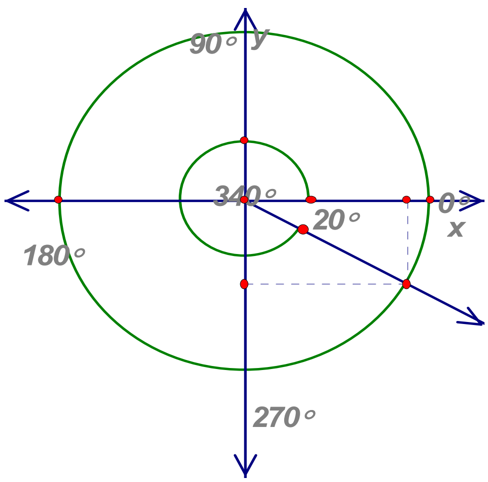
Solución:
a) sen(227º) = sen (180º + 47º) = - sen 47º
   cos 227º = cos (180º + 47º) = - cos47º

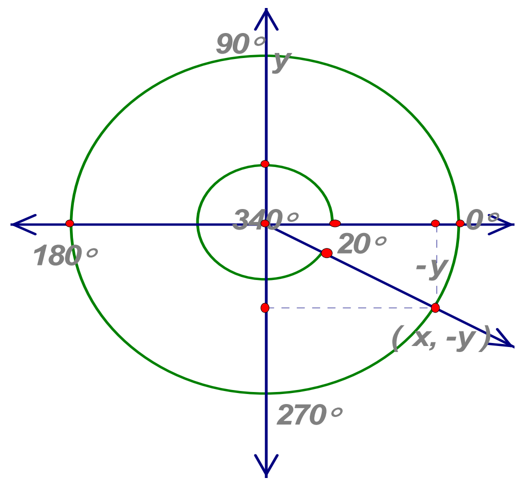
b) sen 260º = sen (180º + 80º) = - sen 80º
   cos 260º = cos (180º + 80º) = - cos 80º

c) sen 265º = sen (180º + 85º) = - sen 85º
   cos 265º = cos (180º + 85º) = - cos 85º

ANGULOS EN EL CUARTO CUADRANTE

Veamos el análisis con el ángulo de 340º, lo cual podemos escribirlo 360º – 20º , así tenemos





Así y = sen 20º

x = cos 20º (1)

- y = sen 340º

x = cos 340º (2)

de (1) y (2) se tiene

sen 340º = sen (360º - 20º) = – sen 20º

cos 340º = cos (360º - 20º) = cos 20º

En forma general se tiene para ángulos en el IV cuadrantes

sen(360º - A) = – sen A
cos (360º - A) = – cosA

Ejemplos:
Deje en términos de los respectivos valores del seno y el coseno de un ángulo agudo los ángulos

a) 353º
b) 1435º

Solución:

a)
sen 353º = sen (360º - 7) = - sen 7º

cos 353º = cos (360º – 7º) = - cos 7º

b)
sen 1435º = sen (355º) = sen (360º – 5º) = - sen 5º (1435 = 3 * 360 + **355**)

cos 1435º = cos (355º) = cos (360º – 5º) = - cos 5º (1435 = 3 * 360 + **355**)

Haciendo un resumen lo anterior podemos establecer un cuadro de signos para las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para los cuadrantes I, II, III y IV:

Cuadrante / Razón	I	II	III	IV
Sen	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tag	+	-	+	-

Observaciones importantes:

a) En el primer cuadrante todas los razones trigonométricas son positivas.

b) En el segundo cuadrante sólo la razón trigonométricas **seno** es positiva observe la letra inicial de **s**eno y la letra inicial de **s**egundo cuad. son iguales, esto nos facilita el saber qué razón es positiva en el segundo cuadrante.

c) En el tercer cuadrante sólo la razón **tangente** es positiva observe la letra inicial de **t**angente y la letra inicial de **t**ercer cuad. son iguales, esto nos facilita el saber qué razón es positiva en el tercer cuadrante.

d) En el cuarto cuadrante sólo la razón trigonométricas **coseno** es positiva observe la letra inicial de **c**oseno y la letra inicial de **c**uarto cuad. son iguales, esto nos facilita el saber qué razón es positiva en el cuarto cuadrante.

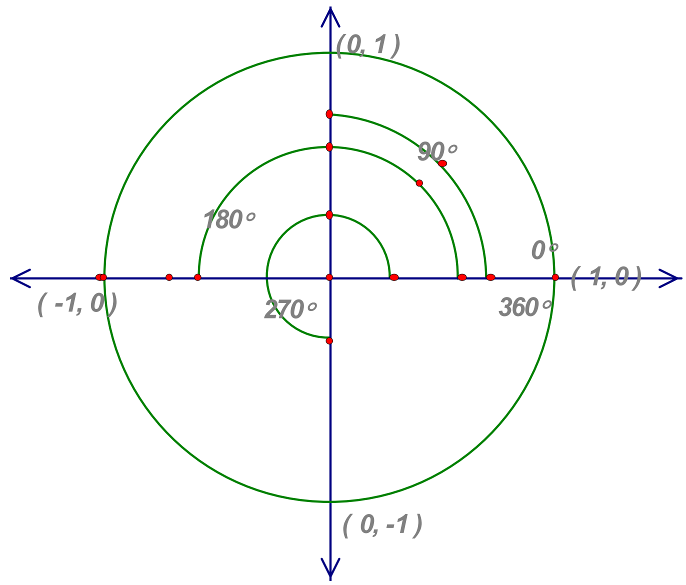
VALORES de las RAZONES TRIGONOMÉTRICAS SENO, COSENO para los ÁNGULOS 0º, 90º, 180º, 270º Y 360º

Calcular los valores para las razones trigonométricas seno, coseno, para los ángulos: 0º, 90º, 180º, 270º y 360 º es relativamente fácil.

El círculo trigonométrico es intersecado por los dos ejes, cuyas coordenadas son (1, 0), (0, 1), (-1, 0) y (0, -1), para los ángulos 0º, 90º, 180º, 270º , respectivamente, si se hace la correspondencia con el par ordenado (x, y) y el par (cos, sen) se observa que

Ángulo / Razón	0º	90º	180º	270º	360º
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tag	0	No definido	0	No definido	0

REPRESENTACIÓN GRÁFICA de los ÁNGULOS 0º, 90º, 180º, 270º Y 360 º



Bibliografía

Calvo, Manuel. Matemática Undécimo Año, San José, Costa Rica. 1974.

Barahona D. Manuel. Matemática Elemental. 1º edición., San José, Costa Rica, Editorial UCR., 1986.

Hooper, Alfred y Griswold, Alice. Trigonometría. Publicaciones Culturales, 1977.