

Ejercicios sobre Ángulos de Referencia

1. Localizar los siguientes puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y encontrar el valor de la distancia (d) del punto al origen correspondiente a cada uno de ellos:

$$A(1,2) \qquad B(-3,4) \qquad C(-3,-3\sqrt{3}) \qquad D(4,-5)$$

$$P(-4,7) \qquad Q(2,-5) \qquad R(-1,\sqrt{2}) \qquad S(-24,-7)$$

2. En cada uno de los siguientes puntos P encontrar la coordenada que falta: (d es la distancia del punto al origen, conocido también como el radio (r) en el círculo trigonométrico)

- | | |
|--|---|
| a) $x=2$, $d=3$, P en el I cuadrante. | j) $x=3$, $d=3$. |
| b) $x=-3$, $d=5$, P en el II cuadrante. | k) $y=-2$, $d=2$. |
| c) $y=-1$, $d=3$, P en el III cuadrante. | l) $x=-6$, $d=6$. |
| d) $x=2$, $d=\sqrt{5}$, P en el IV cuadrante. | m) $y=5$, $d=5$. |
| e) $y=6$, $d=9$, P en el I cuadrante. | n) $x=0$, $d=2$, y positiva. |
| f) $x=-2$, $d=\sqrt{11}$, P en el III cuadrante. | \tilde{n}) $y=0$, $d=1$, x negativa. |
| g) $y=-4$, $d=$, P en el IV cuadrante. | o) $y=0$, $d=4$, x negativa. |
| h) $x=12$, $d=13$, P en el IV cuadrante. | p) $x=0$, $d=7$, y positiva. |
| i) $x=1$, $d=\sqrt{2}$, P en el I cuadrante. | |

3. Hallar los ángulos de referencia de los siguientes ángulos: (*Haga un bosquejo rapido de cada ángulo, para una mejor visualización del ejercicio.*)

- | | |
|-----------------|----------------------------------|
| a) 125° | i) -100° |
| b) 300° | j) $\frac{-5\pi}{6}$ |
| c) 78° | k) $\frac{7}{4}\pi$ |
| d) 200° | l) $\frac{4}{3}\pi$ |
| e) -290° | m) $\frac{-17}{20}\pi$ |
| f) -145° | n) $-\frac{41}{180}\pi$ |
| g) -205° | \tilde{n}) $\frac{17}{36}\pi$ |
| h) -54° | o) $\frac{4}{3}\pi$ |

4. Hallar los ángulos de referencia de los siguientes ángulos: (*Haga un bosquejo rapido de cada ángulo, para una mejor visualización del ejercicio.*)

a) -952°	R/ 52° .	j) $\frac{587\pi}{180}$	R/ $\frac{47}{180}\pi$.
b) -471°	R/ 69° .	k) $-\frac{997}{180}\pi$	R/ $\frac{83}{180}\pi$.
c) 880°	R/ 20° .	l) $\frac{98}{45}\pi$	R/ $\frac{8\pi}{45}$.
d) 718°	R/ 2° .	m) $-\frac{139\pi}{30}$	R/ $\frac{11\pi}{30}$.
e) -610°	R/ 70° .	n) $\frac{283}{90}\pi$	R/ $\frac{13}{90}\pi$.
f) -814°	R/ 86° .	ñ) $-\frac{481}{180}\pi$	R/ $\frac{59\pi}{180}$.
g) 673°	R/ 47° .	o) $\frac{92\pi}{45}$	R/ $\frac{2\pi}{45}$.
h) -650°	R/ 70° .	p) $\frac{217}{180}\pi$	R/ $\frac{37}{180}\pi$.
i) 752°	R/ 32° .		

5. Encontrar las seis funciones trigonométricas para los ángulos formados por los puntos:

a) (12,5)	e) (-40,9)	i) (105,-119)
b) (9,40)	f) (5,-12)	j) (1,-1)
c) (-4,3)	g) (10,-17)	k) $(-\sqrt{3},1)$
d) (-7,-24)	h) (-7,11)	l) $(1,-\sqrt{3})$

6. Determinar los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales siguientes:

a) 0°	f) -0°
b) 90°	g) -90°
c) 180°	h) -180°
d) 270°	i) -270°
e) 360°	j) -360°

Signos de las Funciones Trigonométricas

7. ¿ En qué cuadrante cae el lado terminal de θ , si
- | | |
|--|--------|
| a) $\operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{sec} \theta$ son ambos negativos ? | R/III. |
| b) $\operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{tan} \theta$ son ambos positivos ? | R/I. |
| c) $\operatorname{sec} \theta$ es positiva y $\operatorname{tan} \theta$ es negativa ? | R/IV. |
| d) $\operatorname{sen} \theta$ es positivo y $\operatorname{sec} \theta$ es negativa ? | R/II. |
8. ¿ En qué cuadrante puede terminar θ , α y β si
- | | | | |
|--|--------------|--|---------|
| a) $\operatorname{sen} \theta$ es positivo ? | R/ I y II. | g) $\operatorname{tan} \beta < 0$ y $\operatorname{sec} \beta > 0$ | R/ IV. |
| b) $\operatorname{cos} \theta$ es negativo ? | R/ II y III. | h) $\operatorname{tan} \beta > 0$ y $\operatorname{sen} \beta > 0$ | R/ I. |
| c) $\operatorname{tan} \theta$ es negativa ? | R/ II y IV. | i) $\operatorname{sen} \alpha < 0$ y $\operatorname{cos} \alpha < 0$ | R/ III. |
| d) $\operatorname{sec} \theta$ es positiva ? | R/ I y IV. | j) $\operatorname{tan} \beta > 0$ y $\operatorname{csc} \beta < 0$ | R/ III. |
| e) $\operatorname{tan} \alpha > 0$ y $\operatorname{sec} \alpha > 0$ | R/ I. | k) $\operatorname{csc} \alpha > 0$ y $\operatorname{sec} \alpha < 0$ | R/ II. |
| f) $\operatorname{sen} \alpha > 0$ y $\operatorname{sec} \alpha < 0$ | R/ II. | l) $\operatorname{tan} \alpha < 0$ y $\operatorname{sec} \alpha < 0$ | R/ II. |
9. El lado terminal de un ángulo de medida α interseca la circunferencia trigonométrica en $(\frac{2\sqrt{5}}{3}, \frac{-2}{3})$. Hallar el valor $\operatorname{cot} \alpha$ y $\operatorname{sec} \alpha$. R/ $-\sqrt{5}$ y $\frac{\sqrt{30}}{5}$.
10. Las coordenadas de un punto P son $(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$. Calcule el valor cos , tan , sec y csc .
R/ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $-\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.
11. El lado terminal de un ángulo cuya medida es θ está en el tercer cuadrante y determina un ángulo de referencia de $\frac{\pi}{3}$. ¿Cuál es el valor de la cotangente y de la cosecante?
R/ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$.
12. El lado terminal de un ángulo cuya medida es θ está en el cuarto cuadrante y determina un ángulo de referencia de $\frac{\pi}{3}$. ¿Cuál es el valor de la tangente y del coseno ?
R/ $-\sqrt{3}$ y $\frac{1}{2}$.
13. El lado terminal de un ángulo cuya medida es θ está en el primer cuadrante y determina un ángulo de referencia de $\frac{\pi}{6}$. ¿Cuál es el valor del seno y de la secante? R/ $\frac{1}{2}$ y $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
14. El lado terminal de un ángulo cuya medida es θ está en el segundo cuadrante y determina un ángulo de referencia de $\frac{\pi}{6}$. ¿Cuál es el valor del coseno y de la cosecante?
R/ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ y 2.

15. El lado terminal de un ángulo cuya medida es β está en el cuarto cuadrante y determina un ángulo de referencia de $\frac{\pi}{4}$. ¿Cuál es el valor $\tan \beta$ y de $\csc \beta$? $\mathbf{R}/-1$ y $-\sqrt{2}$.
16. El lado terminal de un ángulo cuya medida es θ está en el segundo cuadrante y determina un ángulo de referencia de $\frac{\pi}{4}$. ¿Cuál es el valor $\cot \theta$ y de $\sec \theta$? $\mathbf{R}/-1$ y $-\sqrt{2}$.
17. La medida de un ángulo de referencia de un ángulo en el segundo cuadrante cuya medida es γ y $\cos \gamma = -\frac{1}{5}$. Encuentre el valor de $\tan \gamma$, $\sec \gamma$ y $\csc \gamma$. $\mathbf{R}/-2\sqrt{6}$, -5 y $\frac{5\sqrt{6}}{12}$.
18. Si θ es un ángulo agudo tal que $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Hallar el valor de $\sec \theta$, $\cot \theta$ y $\csc \theta$. $\mathbf{R}/-\frac{5}{4}$, $-\frac{4}{3}$ y $-\frac{5}{3}$, estas respuestas son válidas para el ángulo del tercer cuadrante y no del primero.
19. Si θ es un ángulo agudo tal que $\tan \theta = -\frac{3}{4}$. Hallar el valor de $\sec \theta$, $\cot \theta$ y $\csc \theta$. $\mathbf{R}/\frac{5}{4}$, $-\frac{4}{3}$ y $-\frac{5}{3}$, estas respuestas son válidas para el ángulo del cuarto cuadrante y no del segundo.
20. Si α es un ángulo agudo y $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Encontrar el valor cotangente, secante y cosecante de α . $\mathbf{R}/\frac{3}{4}$, $\frac{5}{3}$ y $1, 25$.
21. Si α es un ángulo agudo y $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. Encontrar el valor cotangente, secante y cosecante de α . $\mathbf{R}/-\frac{4}{3}$, $-1, 25$ y $\frac{5}{3}$.
22. Sea β la medida de un ángulo cuyo lado terminal se ubica en el segundo cuadrante y con un ángulo de referencia de medida θ . Si $\sec \theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Hallar el valor $\cot \theta$, $\sec \theta$ y $\csc \theta$. $\mathbf{R}/-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{21}}{3}$ y $\frac{\sqrt{7}}{2}$.
23. Sea α la medida de un ángulo cuyo lado terminal se ubica en el segundo cuadrante y con un ángulo de referencia de medida θ . Si $\cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{7}}$. Hallar el valor $\cot \theta$, $\sec \theta$ y $\csc \theta$. $\mathbf{R}/-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ y $\frac{\sqrt{21}}{3}$.
24. Sea β la medida de un ángulo cuyo lado terminal se ubica en el cuarto cuadrante y con un ángulo de referencia de medida θ . Si $\sec \theta = \frac{-2}{\sqrt{7}}$. Hallar el valor $\cot \theta$, $\sec \theta$ y $\csc \theta$. $\mathbf{R}/-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{21}}{3}$ y $-\frac{\sqrt{7}}{2}$.
25. Sea γ la medida de un ángulo cuyo lado terminal se ubica en el tercer cuadrante y con un ángulo de referencia de medida θ . Si $\tan \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Hallar el valor $\cot \theta$, $\sec \theta$ y $\csc \theta$. $\mathbf{R}/\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{21}}{3}$ y $-\frac{\sqrt{7}}{2}$.

26. Encontrar los valores de $\cos \theta$ y $\tan \theta$, si $\sin \theta = \frac{8}{17}$ y θ pertenece al cuadrante I.
R/ $\frac{15}{17}$ y $\frac{8}{15}$.
27. Encontrar los valores de $\sin \theta$ y $\tan \theta$, dado $\cos \theta = \frac{5}{6}$ en el IV cuadrante. R/ $-\frac{\sqrt{11}}{6}$ y $-\frac{\sqrt{11}}{5}$.
28. Encontrar los valores de $\sin \theta$ y $\cos \theta$, dada $\tan \theta = \frac{-3}{4}$. R/0,6 y -0,8, *estas respuestas son del ángulo ubicado en el segundo cuadrante y no del cuarto.*
29. Encontrar $\sin \theta$, si $\cos \theta = \frac{-4}{5}$ y $\tan \theta$ es positiva. R/-0,6.
30. Encontrar los valores de la tangente y cotangente de θ , dados $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos \theta = \frac{-1}{2}$. R/ $-\sqrt{3}$ y $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
31. Determinar los valores de $\cos \theta$ y $\tan \theta$, si $\sin \theta = -\frac{40}{41}$, con θ en el III cuadrante. R/ $\frac{-9}{41}$ y $\frac{40}{9}$.
32. Encontrar los valores de $\csc \theta$ y $\sec \theta$, dada $\cot \theta = \frac{12}{5}$. R/-2,6 y $-\frac{13}{12}$, *las respuestas son del ángulo ubicado en el tercer cuadrante y no del primero.*
33. Encontrar los valores de $\cos \theta$ y $\csc \theta$, dada $\cot \theta = \frac{-24}{7}$. R/ $\frac{24}{25}$ y $-\frac{25}{7}$, *las respuestas son del ángulo ubicado en el cuarto cuadrante y no del tercer cuadrante.*

Bibliografía

- [1] Avila, Juan Felix. Algebra y Trigonometría: ejemplos y ejercicios. Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- [2] Ayres, Frank Jr. Trigonometría Plana y Esférica. Serie Schaum, Editorial McGraw-Hill.
- [3] Baldor, Aurelio. Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría.
- [4] MEP. Exámenes de Bachillerato. Departamento de Control de Calidad. Costa Rica.