FUNCION CUADRATICA

Se llama función cuadrática a una función poli nómica real de variable real, que tiene grado dos. La función cuadrática tiene la forma:

$$f(x)=ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

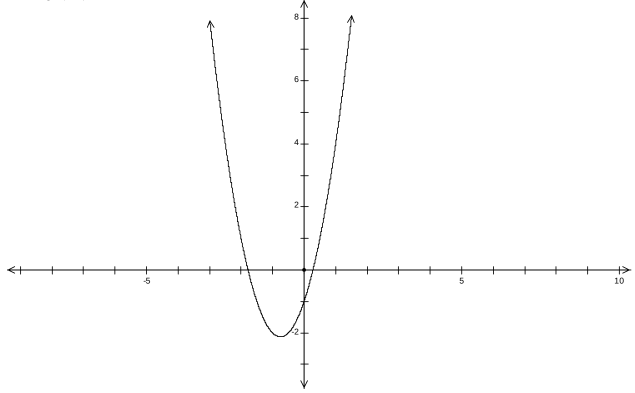
Ejemplos:

$f(x)=x^2+3x+2$ $\quad f(x)=3x^2+x-5$ $\quad f(x)=-x^2+3$ $\quad f(x)=x^2$
$f(x)=\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{3}x-\frac{9}{4}$

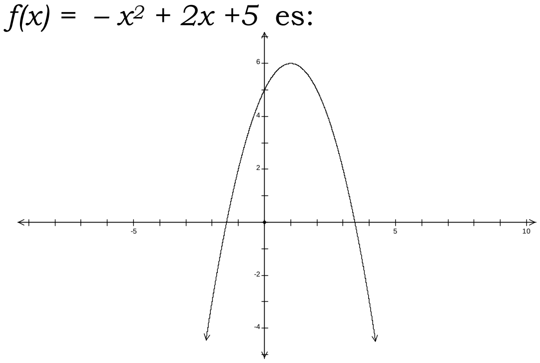
El dominio de toda función cuadrática es el conjunto de los números reales, decir que D_f = IR

REPRESENTACIÓN GRAFICA

La gráfica de una función cuadrática, representa una parábola cuyo eje es paralelo al *eje y*.
Esta parábola se abre hacia arriba si a> 0, y se dice que es cóncava hacia arriba.
Ejemplo:
La gráfica que corresponde a $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ es:



Esta parábola se abre hacia abajo si a< 0, y se dice que es cóncava hacia abajo.
Ejemplo:
La gráfica que corresponde a $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ es:



Aunque existen muchas técnicas especiales y métodos abreviados para graficar estas funciones, veremos un método práctico y directo, que consiste en determinar ciertos pares ordenados de la función cuadráticas claves para su gráfica.

A continuación determinaremos esos pares ordenados para la función $f(x)= x^2 - 6x +5$, es importante tener claro que para esta función a =1, b = -6, c = 5.

EJE DE SIMETRIA

La curva llamada parábola que corresponde a la gráfica de una función cuadrática, es simétrica con respecto a una recta que es paralela al eje y, esta recta recibe el nombre de eje de simetría y esta dado por $x = \frac{-b}{2a}$.

Para $f(x)= x^2 - 6x +5$, el eje de simetría corresponde a $x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

El eje de simetría para $f(x)= x^2 - 6x +5$, corresponde a $x = 3$

EL VERTICE

Es el punto más alto o más bajo de la parábola. Si es cóncava hacia abajo el vértice será el punto máximo de la gráfica; si es cóncava hacia arriba será el punto mínimo.
El vértice es un par ordenado donde x es el eje de simetría, y y se obtiene evaluando la ecuación con el eje de simetría.

Ejemplo:
Como en nuestro ejemplo $f(x)= x^2 - 6x +5$, su gráfica es cóncava hacia arriba, ya que $a > 0$, su vértice es el punto mínimo.
Dado que ya habíamos determinado que el eje de simetría, para el vértice $x = 3$, además el valor de y, se obtiene evaluando la función con 3.

Entonces $y = (3)^2 - 6(3) +5$
$y = 9 - 18 + 5$
$y = -4$

Por lo tanto el vértice corresponde al par ordenado (3, - 4)

INTERSECCIÓN CON EL EJE Y

La intersección con el eje de las ordenadas, corresponde al termino independiente de la ecuación $f(x)= ax^2 + bx + c$, o sea corresponde a c. Por lo tanto la intersección con el eje y corresponde al par (0 , c).

En el ejemplo $f(x)= x^2 - 6x +5$, la intersección corresponde al par (0, 5).

INTERSECCION CON EL EJE X

Sabemos que la intersección con el eje x, corresponde a un par ordenado donde *"y"* es cero.

Por lo anterior $y=0$, además $y= ax^2 + bx + c$ entonces podemos encontrarla intersección de está parábola con el eje de las abscisas resolviendo la ecuación:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

El trinomio $ax^2 + bx + c$ es de segundo grado, tendrá a lo sumo dos ceros, es decir tendrá como máximo dos soluciones o raíces.

Para saber el número de raíces reales que puede tener un trinomio cuadrático haremos uso de la formula llama discriminante, y se llama así por que nos permite discriminar cuantas soluciones reales tiene:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

El estudio de discriminante nos dará el siguiente resultado:

1) Si $\Delta>0$ entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales, la gráfica interseca dos veces el eje *x*.
2) Si $\Delta=0$ entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una sola solución real, la gráfica interseca una sola vez el eje *x*.
2) Si $\Delta<0$ entonces $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales, la gráfica no interseca el eje *x*

Ejemplo
Determinar cuantas soluciones tiene la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$
Como sabemos para este ejemplo $a = 1$ $b = -6$ $c = 5$
Entonces:
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$
$\Delta = 36 - 20$
$\Delta = 16$

y como Δ es mayor que cero podemos afirmar que tiene dos soluciones, además 16 es cuadrado perfecto, por lo tanto las raíces serán racionales.
Para determinar sus soluciones hacemos usos de la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

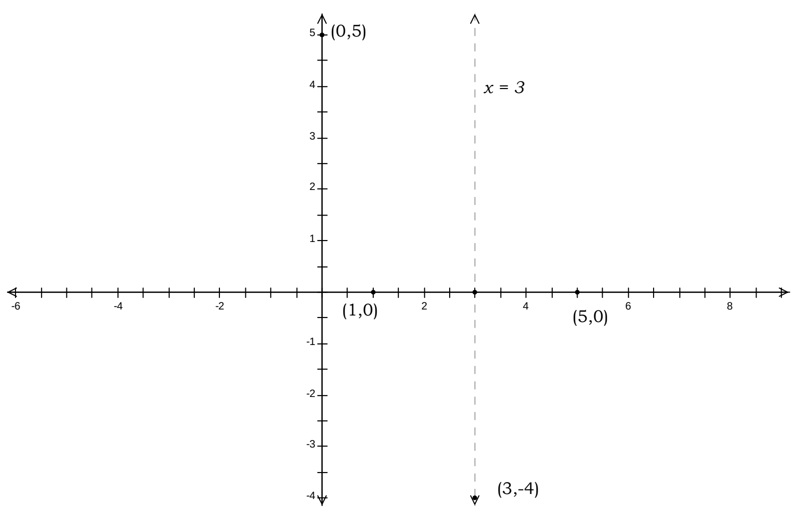
$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \qquad x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{6+4}{2} \qquad x_2 = \frac{6-4}{2}$$

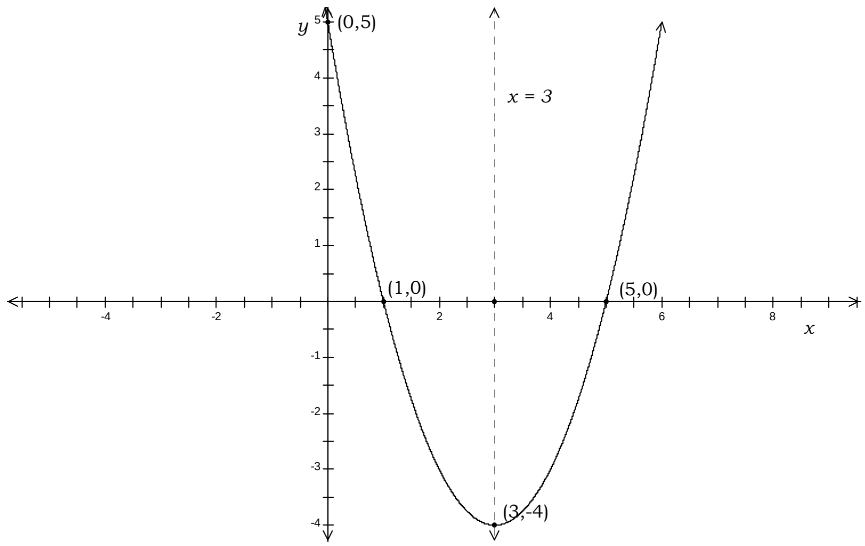
$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 1$$

Esto significa que la parábola interseca al eje de las abscisas en los puntos (1, 0) y (5, 0).

RESUMIENDO:
Para dibujar la gráfica de una función cuadrática, debemos tener a mano los siguientes datos:
Le tipo de concavidad, el eje de simetría, el vértice, la intersección con el eje *y*, la intersección con el eje *x*.
Para dibujar la grafica que corresponde a la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ primero ubicamos todos los puntos en un eje de coordenadas:



Luego unimos todos los puntos:



EJERCICIO

Graficar las siguientes funciones:

1) $f(x)=x^2-4x-5$

2) $f(x)=-3x^2-11x+4$

3) $f(x)=-x^2+x+2$

4) $f(x)=-x^2-10x-25$

5) $f(x)=4x^2-12x+9$

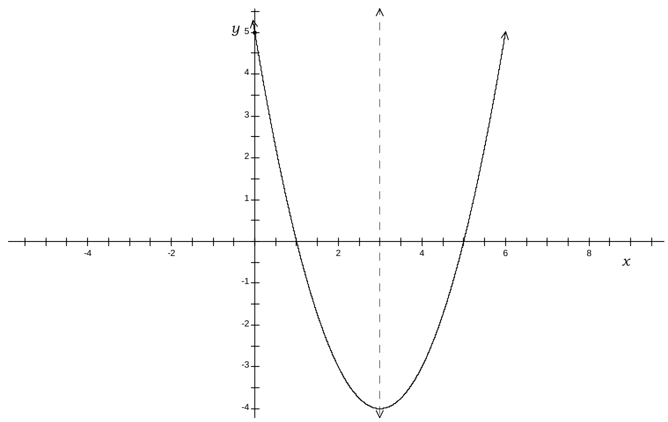
6) $f(x)=-x^2+4$

7) $f(x)=-x^2+4x$

8) $f(x)=-2x^2$

INTERVALOS DE MONOTONIA

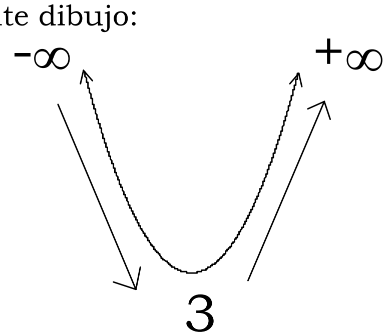
Los gráficos de algunas funciones no tienen un comportamiento monótono, es decir, que toda la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente como la función lineal, sino que crece y decrece en un determinado dominio.
Ejemplo:
Determinar los intervalos de monotonía, de la función $f(x)= x^2 - 6x +5$.
R/. Gráficamente podemos observar que:



Esta función es estrictamente decreciente en el intervalo: $\left]-\infty,3\right[$

Esta función es estrictamente creciente en el intervalo: $\left]3,+\infty\right[$

No es necesario graficar la función cuadrática para determinar los intervalos de monotonía. Bastará con determinar el eje de simetría y la concavidad de la parábola.
Ejemplo:
Determinar los intervalos de monotonía, de la función $f(x)= x^2 - 6x +5$
En este ejemplo a > 0, por lo que es cóncava hacia arriba, además el eje de simetría es $x = 3$
ya que $x = \dfrac{-(-6)}{2\cdot 1}$
$x = 3$.
Sabiendo que el dominio de la función cuadrática es de $-\infty$ a $+\infty$, todo IR, y la información anterior, podemos hacer el siguiente dibujo:



Del cual podemos decir que esta función es estrictamente:

Decreciente en el intervalo: $\left]-\infty,3\right[$
Creciente en el intervalo: $\left]3,+\infty\right[$

Ejemplo:

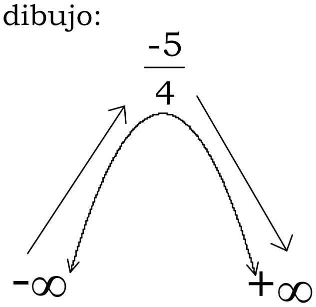
Determinar los intervalos de monotonía, de la función $f(x)=-2x^2 - 5x + 3$

En este ejemplo a < 0, por lo que es cóncava hacia abajo, además el eje de simetría es $x = \frac{-5}{4}$

ya que $x = \frac{-(-5)}{2 \cdot -2}$

$x = \frac{-5}{4}$.

Sabiendo que el dominio de la función cuadrática es de -∞ a + ∞, todo IR, y la información anterior, podemos hacer el siguiente dibujo:



Del cual podemos decir que esta función es estrictamente:

Creciente en el intervalo: $\left]-\infty, \frac{-5}{4}\right[$

Decreciente en el intervalo: $\left]\frac{-5}{4}, +\infty\right[$

EJERCICIO

Sin hacer la gráfica, determinar los intervalos de monotonía de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

2) $f(x) = -3x^2 - 11x + 4$

3) $f(x) = -x^2 + x + 2$

4) $f(x) = -x^2 - 10x - 25$

5) $f(x) = x^2 + 8$

6) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

7) $f(x) = -x^2 + 4$

8) $f(x) = -x^2 + 4x$

9) $f(x) = -2x^2$

10) $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Dados tres puntos en un plano, puede determinarse una función cuadrática, siempre y cuando:

1. Los puntos no sean colineales
2. Dos de ellos no pertenezcan a la misma recta vertical.

Si las características anteriores se cumplen, se puede encontrar una función cuadrática cuya gráfica pase por esos tres puntos.

Hay tres casos que se pueden presentar:

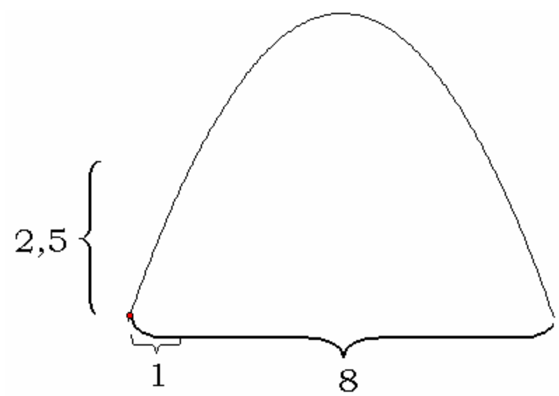
1. Dos de los puntos dados están en el eje X.
2. Uno de los tres puntos esta en el eje X.
3. Ningún punto dado pertenece al eje X.

Para efectos del objetivo analizaremos solamente como resolver el caso 1: dos de los puntos dados están en el eje X.

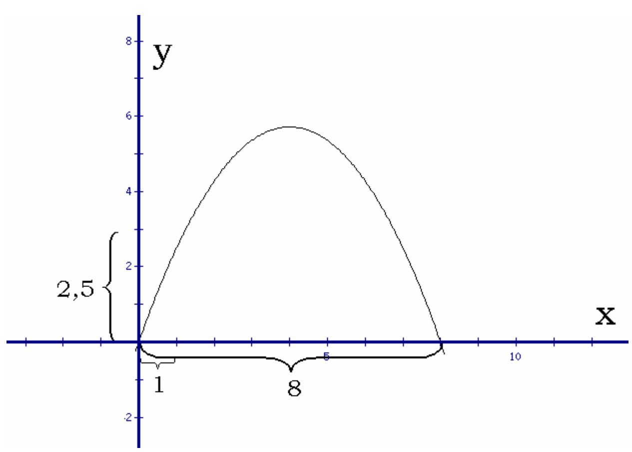
El método para encontrar la formula de dicho caso, lo analizaremos en el siguiente ejemplo:

Un grupo de estudiantes con ayuda de tubos de PVC construye un arco de forma parabólica, para ser colocado en la entrada de su colegio. Las bases del arco están a 8 metros una de la otra. Los estudiantes cuentan con una cinta métrica de 2,5 metros. Desean saber cual es la altura máxima que alcanza el arco. Pero con su cinta solo pueden determinar que a 1 metro de la base la altura es de 2,5 metros. ¿Cuál es la altura máxima del arco?

El primar paso es el de dibujar la forma de la parábola que nos describen.



Luego asociamos esta figura al eje de las coordenadas



De aquí podemos determinar tres pares ordenados
(0,0) (8,0) (1, 2.5)

Dado que:

Teorema del factor: Sea P(x) un polinomio. Si P(a)=0 se dice que a es un cero del polinomio y una solución o raíz de la ecuación P(x)=0, por lo tanto (x–a) es un factor del polinomio P(x).

Entonces podemos determinar que:

De $(0,0) \rightarrow x = 0$ y de $(8,0) \rightarrow x = 8$

$(x+0) = 0$ $(x-8) = 0$

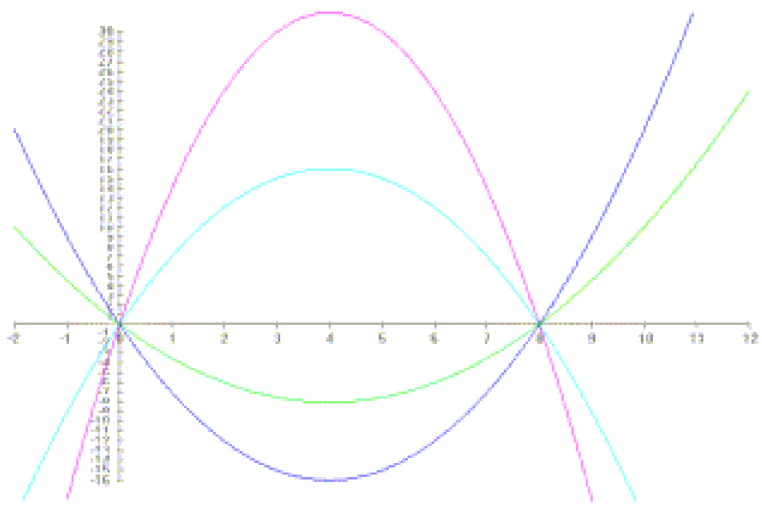
Luego, para darle forma a la función multiplicamos los factores obtenidos:

$$x(x-8)=0$$
$$x^2-8x = 0$$

Ahora, a esta ecuación cuadrática podemos asociarle la función cuadrática de la siguiente manera:

$$f(x) = x^2-8x$$

Aunque $f(x) = x^2-8x$ es una función que interseca al eje x en los puntos, (0,0) y (8,0), existen muchas graficas que pueden pasar por esos punto sin ser la que necesitamos.



Por lo tanto debemos determinar que constante **a**, determina la grafica que pasa por el punto (1 , 2.5) que es el que necesitamos, para ello:

$$f(x) = a(x^2- kx) \ , \ a, k \in \mathbb{R}$$

Así en nuestro ejemplo $f(x) = a(x^2-8x)$ la cual evaluamos en el punto que nos interesa para determinar el valor de a.

Entonces:

$$f(x) = a(x^2 - 8x)$$

$$2{,}5 = a(1^2 - 8 \bullet 1)$$

$$2{,}5 = a \bullet -7$$

$$\frac{2{,}5}{-7} = a$$

$$\frac{-5}{14} = a$$

Puesto que ya sabemos el valor de la constante podemos determinar la forma de la función que determina los tres puntos facilitados por el problema:

$$f(x) = \frac{-5}{14}(x^2 - 8x)$$

$$f(x) = \frac{-5x^2}{14} + \frac{20x}{7}$$

Dado que la grafica de esta función es cóncava hacia abajo, el vértice es el punto máximo. Determinando el "**y**" del vértice, obtendremos la altura máxima del arco.

Para Obtener "**y**" del vértice evaluamos la función con el valor del eje de simetría. El eje de simetría en este caso es 4 que es el punto medio entre $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$. O bien con la formula $\frac{-b}{2a}$

R/. Por lo anterior el punto más alto del arco es de 5,71 m.

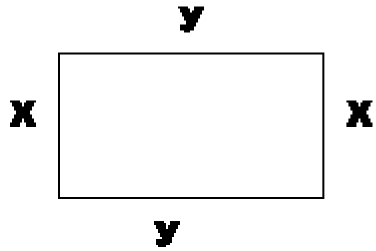
Otro tipo de problemas en las que la función cuadrática nos puede ayudar es cuando deseamos obtener el máximo provecho de una situación.

Analicemos

Ejemplo 1

Se desea hacer un corral de forma rectangular con 100m de malla, para encerrar algunos pollos, ¿cuál deben ser las dimensiones del corral para cubrir el área máxima?

En primer lugar dibujaremos la situación que se nos plantea



Si x representa el ancho, además y representa el largo, tendríamos que el perímetro es $2x+2y$, como solo contamos con 100m de malla, entonces este perímetro debe ser igual a 100 es decir

$$2x+2y = 100$$

Expresaremos a y en términos de x, para trabajar con una sola variable, por lo que

$$2x+2y = 100$$
$$2y = 100 - 2x$$
$$y = \frac{100 - 2x}{2}$$
$$y = 50 - x$$

El área de un rectángulo es base por altura por lo que el área deseada puede expresarse como

$$A = x\,y$$

Puesto que **y** expresado en términos de **x** es $(50 - x)$

$$A = x\,(50 - x)$$

Y puede escribirse

$$A = 50x - x^2$$

El área en función del ancho es

$$A_{(x)} = 50x - x^2$$

Como es una función cuadrática, los resultados se comportan gráficamente como una parábola. Esto significa que tiene un valor máximo que se obtiene con el vértice, y es precisamente lo que necesitamos saber.

El x del vértice se obtiene mediante el eje de simetría

$$x = \frac{-b}{2a}$$

En este caso $x = \dfrac{-50}{2 \bullet -1}$

$$x = 25$$

Esto significa que el área máxima se obtiene cuando el largo es 25, y la longitud del ancho la determinamos por la formula $y = 50 - x$

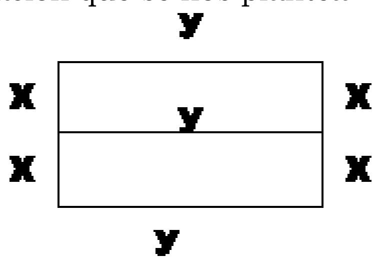
$$y = 50 - 25$$
$$y = 25$$

Por consiguiente la figura que con un perímetro de 100m encierra el área máxima es un cuadrado de 25 m de lado y el área máxima es de 625 m^2 .

Ejemplo 2

Un granjero dispone de 210 m de malla para delimitar dos corrales adyacentes rectangulares idénticos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para obtener el área máxima?

En primer lugar dibujaremos la situación que se nos plantea



Si **x** representa el ancho de cada rectángulo, además **y** representa el largo, tendríamos que el perímetro es 4x+3y, como solo contamos con 210m de malla, entonces este perímetro debe ser igual a 210 es decir

$$4x+3y = 210$$

Expresaremos a **y** en términos de **x**, para trabajar con una sola variable, por lo que

$$4x+3y = 210$$
$$3y = 210 - 4x$$
$$y = \frac{210 - 4x}{3}$$
$$y = 70 - \frac{4x}{3}$$

El área de un rectángulo es base por altura por lo que el área deseada puede expresarse como

$$A = 2x\,y$$

Puesto que **y** expresado en términos de **x** es $\left(70 - \frac{4x}{3}\right)$

$$A = 2x\left(70 - \frac{4x}{3}\right)$$

Y puede escribirse

$$A = \left(140x - \frac{8x^2}{3}\right)$$

El área en función del ancho es

$$A_{(x)} = 140x - \frac{8x^2}{3}$$

Como es una función cuadrática, los resultados se comportan gráficamente como una parábola. Esto significa que tiene un valor máximo que se obtiene con el vértice, y es precisamente lo que necesitamos saber.

El x del vértice se obtiene mediante el eje de simetría

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Puesto que **y** expresado en términos de **x** es $\left(70 - \frac{4x}{3}\right)$

Como es una función cuadrática, los resultados se comportan gráficamente como

En este caso $x = \dfrac{-140}{2 \bullet \frac{-8}{3}}$

$$x = \frac{105}{4}$$

Una parábola. Esto significa

Esto significa que el área máxima se obtiene cuando el largo es $\frac{105}{4}$, y la longitud del ancho la determinamos por la formula $y = 70 - \frac{4x}{3}$

$$y = 70 - \frac{4 \bullet \frac{105}{4}}{3}$$

$$y = 70 - \frac{105}{3}$$

$$y = 35$$

Por consiguiente la longitud de lo rectángulo es de 35 m y el ancho de cada rectángulo es de 26,25m y el área máxima es de 1837.5 m^2

En este caso $x = \dfrac{-140}{2 \bullet \dfrac{-8}{3}}$

$$x = \frac{105}{4}$$

Esto significa que el área máxima se obtiene cuando el largo es $\dfrac{105}{4}$, y la longitud del ancho la determinamos por la formula $y = 70 - \dfrac{4x}{3}$

$$y = 70 - \frac{4 \bullet \frac{105}{4}}{3}$$

$$y = 70 - \frac{105}{3}$$

$$y = 35$$

Por consiguiente la longitud de lo rectángulo es de 35 m y el ancho de cada rectángulo es de 26,25m y el área máxima es de 1837.5 m^2

Resuelva usted los siguientes:

1. En la entrada a la Ciudad de Cartago hay un parque con una escultura de forma de arco parabólico cóncavo hacia abajo. Sobre el suelo, la distancia entre los extremos es de 12 m; la altura del monumento a 1 m de cada uno de los extremos es de 1,5 m ¿Cuál es la altura máxima de este monumento?

2. Un salta montes da un salto y cae a 2 m de su posición inicial, cuando estaba a 0,70 m del lugar donde inicio el salto, estaba a 2,73 m del suelo. ¿Si su salto forma una parábola, cuál es la ecuación? ¿Cuál fue el punto más alto que alcanzo?

3. Un balín impacta con el suelo y da varios saltos. De donde impacta por primera vez con el suelo y el segundo golpe hay 22,5 cm. Cuando estaba a 5 cm. del primer impacto alcanzo una altura de 175 cm. Si su trayectoria es una parábola ¿cuál es la ecuación? ¿Cuál fue el punto más alto que alcanzo?
4. Un chorro de agua es lanzado en forma parabólica hacia arriba, desde el punto de partida hasta donde cae el chorro, hay 10 m, y pasa rozando una cuerda que está a 2 m de donde inicia el chorro, ésta cuerda está a 3 m sobre el suelo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el chorro?

5. Una rana da un salto, de 3 metros de longitud si a 0,3 m de su posición inicial alcanza una altura de 0,6 m. y sí su salto forma una parábola, ¿cuál es la ecuación? ¿Cuál fue el punto más alto que alcanzo?

6. Una rana da un salto de forma parabólica de 90 cm y la altura máxima alcanzada es de 30 cm. Halle la formula de la función cuadrática que describe la trayectoria de la rana.

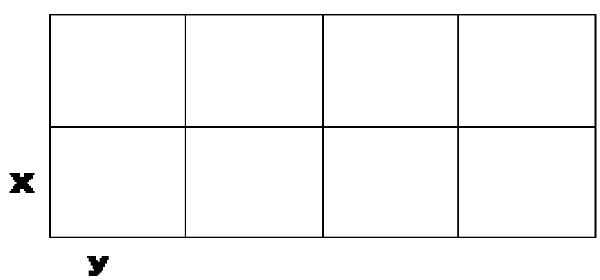
7. En un partido de voleibol que se disputan entre el quipo rojo y el equipo azul, se realiza un saque del equipo rojo en el cual el balón alcanza una altura máxima de 12,5 m y fue recibido por un jugador del equipo azul ubicado a 10m. Si se utiliza un eje de coordenadas cuyo origen esta en el lugar donde se hace el saque. Halle la formula de la función cuadrática que describe la trayectoria del balón.

8. Un precarista desea cercar un terreno en forma rectangular, utilizando uno de los lados de un muro ya existente. Si dispone de 100 metros de malla. ¿cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para que este tenga área máxima?

9. Un granjero dispone de 600 m de malla con el cual desea encerrar un corral rectangular a lo largo de un río (el cual tiene forma rectilínea). Si no se va a utilizar maya en el lado que corresponde al río, que dimensiones tendrá el corral de mayor área.

10. Con una maya de 40 m de largo se desea construir una cerca de forma rectangular. La cerca solamente se debe colocar en tres de los cuatro lados del terreno adyacente a una casa. ¿cuáles son las longitudes del terreno de área máxima?

11. Se usaran 300 m de cedazo para construir unas jaulas para conejos. Para hacerlas se construirá un rectángulo al que se le pondrán divisiones paralelas a los lados de manera que se formen 8 compartimientos iguales. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de cada compartimiento para que su área sea máxima?



12. Se dispone de 200 m de valla para hacer dos corrales adyacentes rectangulares de iguales dimensiones. Cuál son las dimensiones que deben tener para que el área sea la máxima.

13. Dividir el número 120 en dos partes de modo que el producto de ellas sea lo mayor posible.

14. Hallar dos números cuya suma sea 24 y cuyo producto sea tan grande como sea posible.

BIBLIOGRAFIA.

- Corrales Mario –Obando Álvaro, Matemática funciones, 1984.
- Howard E. Taylor y Thomas L. Wade, Matemáticas básicas con vectores y matrices, 1980.
- Raymond A. Barnett, Precálculo funciones y graficas, 1999.
- Reinaldo Jiménez Santamaría, Introducción a la teoría de las funciones, Serigrafiaos, 2003
- Roxanna Meneses Rodríguez, Enseñanza y aprendizaje, 1991.
- Valverde Fallas, Luis Matemática elemental con aplicaciones, 1997.