Problemas de Aplicación de la Función Exponencial y Logaritmica

1. Después que la televisión se introdujo en cierto país, la proporción de jefes de familia que poseían televisor **t** años después se encontro que estaba dado por la fórmula:

$$T = 1 - e^{-0,1t}$$

Encuentre el crecimiento T entre t=3 y t=6. R/$\frac{19}{100}$.

2. La población de cierta isla como función del tiempo **t** se encuentra que está dado por la fórmula:

$$y = \frac{20000}{1 + 6 \cdot 2^{-0,1t}}$$

Hallar el incremento entre t=10 y t=20. R/3000.

3. El peso W (en kg) de una población de elefantes africanos hembras está relacionado con la edad **t** (**t** en años) mediante:

$$W(t) = 2600(1 - 0{,}5e^{-0,075t})^3$$

a) ¿Cuánto pesa un elefante recien nacido? R/325 kg.

b) ¿Suponiendo que la hembra adulta pesa 1800 kg estime su edad? R/20 años aproximadamente.

4. En 1980 la población de los Estados Unidos era aproximadamente 227 millones y ha ido creciendo a una razón de 0.7 % por año. La población N(t), **t** años más tarde, se podría aproximar mediante

$$N(t) = 227 \cdot e^{0,007t}$$

a) Si continuara este patrón de crecimiento, ¿cuál será la población de Estados Unidos para el año 2000? R/261 millones aprox.

b) ¿...y el año 2007? R/274 millones aprox.

5. En un laboratorio de Biotecnología se tiene un cultivo de bacterias en un fermentador durante 4 horas. La población de bacterias crece rápidamente con el paso del tiempo. La función que relaciona la cantidad de bacterias y el tiempo **t** transcurrido en horas es:

$$C(t) = 0{,}025 \cdot e^{t^2}$$

Determine en cuanto se incrementa la población desde t=1 hasta t=3 horas. R/202.51 aprox.

6. Una centena de ciervos, cada uno de 1 año de edad, se introducen en un coto de caza. El número N(t) de los que aún queden vivos después de **t** años se predice que es

$$N(t) = 100 \cdot 0{,}9^t$$

Estime el número de animales vivos después de:

a) 1 año R/90.

b) 5 años R/59.

c) 10 años R/35.

7. Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad en el cuerpo **t** horas después está dada por $A(t) = 10 \cdot 0{,}8^t$.

a) Calcule la cantidad del fármaco restante en el organismo 8 horas después de la ingestión inicial. R/1.68 mg.

b) ¿Qué porcentaje del medicamento que está aún en el organismo se elimina cada hora? R/20 %.

8. Un medicamento se elimina del cuerpo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad A(t) que queda en el cuerpo **t** horas después está dada por $A(t) = 10 \cdot 0{,}8^t$. Para que el fármaco haga efecto debe haber en el cuerpo por lo menos 2 mg.

a) Determine cuándo quedan sólo 2 mg. R/7 horas aprox.

b) ¿Cuál es la semivida (o vida media) del medicamento. R/3 horas aprox.

9. El número de bacterias de cierto cultivo incremento de 600 a 1800 entre las 7 y las 9 am. Suponiendo que el crecimiento es exponencial y **t** representa las horas después de las 7 am. El número $f(t)$ de bacterias esta dado por la fórmula $f(t) = 600 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$

a) Calcule el número de bacterias en el cultivo a las 8; a las 10; y a las 11 am. R/1039, 3118 y 5400.

b) Trace la gráfica de f desde t=0 hasta t=4.

10. Un problema importante de oceanografía consiste en determinar la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La Ley de Beer Lambert establece que se debe utilizar una función exponencial I, tal que $I(x) = I_0 \cdot a^x$, para modelar este fenómeno. Suponiendo que

$$I(x) = 10 \cdot 0{,}4^x$$

es la energía lumínica equivalente (en $cal \cdot \frac{s}{cm^2}$) que llega a una profundidad de **x** metros.

    a) ¿Qué energía se tiene a una profundidad de 2 m? R/1,6.

    b) Trace la gráfica de I, desde x=0 a x=5.

11. Una función exponencial W tal que $W(t) = W_0 e^{kt}$ (para $k > 0$) describe el primer mes de crecimiento de cultivos como maíz, algodón y soya. La función W es el peso total en miligramos, W_0 es el peso del día del brote o emergencia y **t** es el tiempo en días.

    a) Si, para un tipo de soya k=0.2 y $W_0 = 68$, calcule el peso final al mes de haber brotado (t=30). R/27 433,16mg.

    b) A menudo es díficil medir el peso W_0, de la planta cuando acaba de emerger del suelo. Si para una planta de algodón, k=0.21 y W(10)=575 mg. Calcule W_0. R/70,41mg.

12. En 1980 la población estimada de la India era de 651 millones y ha estado creciendo a una tasa de alrededor del 2 % anual. La población N(t), **t** años más tarde, puede aproximarse mediante $N(t) = 651e^{0{,}02t}$. Suponiendo que esta tasa alta de crecimiento continúa, calcule la población de la India en el año 2000 y 2006. R/971 y 1095 millones.

13. La población $N(t)$ de la India (en millones) **t** años después de 1980 puede aproximarse por $N(t) = 651e^{0{,}02t}$. ¿Cuándo será de mil millones? R/en 21 años.

14. En la ciencia de la pesca se conoce como «cohorte» al conjunto de peces que resulta de una reproducción anual. Normalmente se supone que el número N(t) que sigue vivo cuando han pasado **t** años, está dado por una función exponencial. Para el pez hipogloso del Pacífico, $N(t) = N_0 \cdot e^{0{,}02t}$, en la que N_0 es el tamaño inicial del cohorte. Si el tamaño inicial es de 20, ¿cuántos viven después de 10 años? R/24 peces.

15. El trazador (o marcador) radiactivo ^{51}Cr puede usarse para localizar la posición de la placenta de una mujer embarazada. A menudo se debe pedir esta sustancia a un laboratorio médico. Si se envían A_0 unidades (en microcuries), entonces, debido al decrecimiento radiactivo, el número de unidades A(t) que quedan después de **t** días está dado por $A(t) = A_0 \cdot e^{-0{,}0249t}$.

    a) Si se envian 35 unidades del trazador y este tarda 2 días en llegar, ¿de cuántas unidades se dispone para el análisis? R/33,3 unidades.

    b) Si se necesitan 49 unidades para la prueba, ¿cuántas unidades se deben enviar? R/51,5 unidades.

16. En 1966 la Comisión Internacional Contra la Captura de Ballenas protegió a la población mundial de ballena azul contra los barcos balleneros. En 1978 se pensaba que la población en el hemisferio sur era de 5000. Ahora sin depredadores y con abastecimiento abundante de alimentos, se espera que la población crezca exponencialmente de acuerdo con la fórmula $N(t) = 5000e^{0{,}047t}$, en la que **t** está dado en años.

    a) Pronostique la población en el año 2000. R/14861 ballenas.

    b) Pronostique la población en el año 2007. R/19539 ballenas.

    c) Siguiendo el modelo creado y asumiendo que 0 % de natalidad y 1978 como año cero, ¿cuándo se duplicará la cantidad de ballenas azules? R/15 años aprox.

17. La longitud (en centimetros) de muchos peces comerciales de **t** años de edad se puede aproximar bien mediante la función de crecimiento de Von Bertalandffy; $f(t) = a(1 - be^{-kt})$, en la que **a**, **b** y **k** son constantes.

    a) Para el hipogloso del pacífico, a=200, b=0.956 y k=0.18. Calcule la longitud de un hipogloso típico de 10 años. R/168 cm.

    b) ¿Como se interpreta la constante «a» en la fórmula?

18. Utilizando la fórmula de la escala Richter $R = log(\frac{I}{I_0})$, determine la magnitud de un sismo cuya intensidad es:

    a) 100 veces I_0. R/grado 2.

    b) 10 000 veces I_0. R/grado 4.

    c) 100 000 veces I_0. R/grado 5.

    d) Los terremotos de mayor magnitud registrados han estado entre 7 y 9 en la escala de Richter. Calcule las intensidades correspondientes en términos de I_0. R/10 000 000 veces I_0 y 1 000 000 000 veces I_0.

19. La intensidad del sonido que percibe el oído humano tiene diferentes niveles. Una fórmula para hallar el nivel de intensidad α, en decibeles, que corresponde a intensidad de sonido I es: $\alpha = 10log(\frac{I}{I_0})$ donde I_0 es un valor especial de I que corresponde al sonido más débil que puede ser detectado por el oído bajo ciertas condiciones. Encuentre α en los casos siguientes:

    a) I es 10 veces más grande que I_0. R/10.

    b) I es 1 000 veces más grande que I_0. R/30.

    c) I es 10 000 veces más grande que I_0. (este es el nivel de intensidad promedio de la voz). R/40.

    d) Un nivel de intensidad del sonido de 141 decibeles produce dolor en un oído humano común. ¿Cuántas veces, aproximadamente, debe ser I más grande para que α alcance este nivel ? R/$10^{14{,}1}$ veces más grande.

20. Los químicos usan un número denotado pH para decribir cuantitativamente la acidez o la bisicidad de ciertas soluciones. Por definición, $pH = -log[H^+]$ donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógenos en moles por litros. Aproxime el pH de las siguientes soluciones dados sus correspondientes $[H^+]$:

    a) Vinagre: $[H^+] = 6{,}3 \cdot 10^{-3}$ R/2,2.

    b) Zanahoria: $[H^+] = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ R/5.

    c) Agua de mar: $[H^+] = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ R/8,3.

21. Aproxime la concentración de iones hidrógenos $[H^+]$ en cada una de las siguientes sustancias:

    a) Manzana: pH=3.0 R/$[H^+] = 10^{-3}$.

    b) Cerveza: pH=4.2 R/$[H^+] = 10^{-4{,}2}$.

    c) Leche: pH=6.6 R/$[H^+] = 10^{-6{,}6}$.

22. El número de bacterias que hay en cierto cultivo en el tiempo **t** está dado por $Q(t) = 2 \cdot 3^t$, en donde **t** se mide en horas y Q(t) en miles.

    a) ¿Cuál es el número inicial de bacterias? R/2 mil.

    b) ¿Cuál es el número después de 10 minutos? R/2,4 mil.

    c) ¿Después de 30 minutos? R/3,46 mil.

    d) ¿Despúés de 1 hora? R/6 mil.

23. Las estrellas se clasifican en categorías de brillo llamadas magnitudes. A las estrellas más débiles (con flujo luminoso L_0) se les asigna magnitud 6. A las estrellas más brillantes se le asigna magnitud conforme a la fórmula: $m = 6 - 2{,}5 \cdot log(\frac{L}{L_0})$, en donde L es el flujo luminoso de la estrella.

a) Determine m si $L = 10^{0,4} \cdot L_0$. R/m=5.

b) Resuelva la fórmula para evaluar L en términos de m y de L_0. R/$L = 10^{\frac{6-m}{2,5}} L_0$.

24. Si se detuviera de repente la contaminación del Lago Erie, se ha estimado que el nivel de contaminantes decrecería de acuerdo con la fórmula $y = y_0 \cdot e^{-0,3821t}$, en la que **t** esta en años y y_0 es el nivel de contaminantes cuando se dejo de contaminar. ¿ Cuántos años tomará eliminar el 50 % de los contaminantes? R/1,8 años.

25. En un campo grande la lluvia ácida ha depositado estroncio radiactivo ^{90}Sr. Si a través de la cadena alimentaria llegan al ser humano cantidades suficientes de este elemento, el resultado puede ser cáncer en los huesos. Se ha encontrado que el nivel de radiactividad en el campo es 2.5 veces el nivel de seguridad. El ^{90}Sr decrece conforme a la fórmula $A(t) = A_0 e^{-0,0239t}$, en la que A_0 es la cantidad actual en el campo, **t** es el tiempo en años. En este caso tome $A_0 = 0{,}25$. ¿Durante cuántos años estará contaminado dicho campo? R/38 años aprox.

26. Si 10 gramos (g) de sal se añaden a cierta cantidad de agua, la cantidad q(t) que no se disuelve después de **t** minutos está dada por $q(t) = 10 \cdot (\frac{4}{5})^t$. Trace una gráfica que muestre el valor de q(t) en cualquier momento desde t=0 hasta t=10.

27. Haciendo uso de la fórmula del interés compuesto:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

Suponga que se invirtió $1 000 a una tasa de interés compuesto del 9 % mensual.

a) Calcular el monto final del capital inicial después de 5 años, después de 10 años y después de 15 años. R/$1 565,68; $2 451,36 y $3 838,04.

b) Grafique el crecimiento de la inversión.

28. Si $1 000 se invierten al 12 % anual y se capitalizan los intereses mensualmente,

a) ¿cuál es el monto acumulado después de 1 mes? R/1010.

b) ¿2 meses? R/1020,1.

c) ¿6 meses? R/1061,52.

d) ¿1 año ? R/1126,83.

29. Si cierta marca de automóvil se compra por C dólares, su valor comercial $v(t)$ al final de **t** años está dado por $v(t) = 0,78 \cdot C \cdot 0,85^{t-1}$. Si el costo original es de $10 000, calcule, redondeando a unidades, el valor después de:

a) 1 año. R/$7800.

b) 4 años. R/\$4790.

c) 7 años. R/\$2942.

30. De acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton, un objeto se enfría en forma directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Si cierto objeto pasa de $125°$ a $100°$ en 30 minutos, cuando se encuentra rodeado por aire que tiene una temperatura de $75°$, entonces puede mostrarse que su temperatura $f(t)$ después de **t** horas está dada por $f(t) = 50 \cdot 2^{-2t} + 75$. Si t=0 corresponde a la 1 pm, aproxime la temperatura a las

    a) 2 pm. R/87,5.

    b) 3 pm. R/78,13.

    c) 4 pm. R/75.78

    d) Trace la gráfica de f desde t=0 hasta t=5.

31. El isótopo radiactivo ^{210}Bi tiene una semivida (o vida media) de 5 días, es decir, el número de partículas radiactivas se reducirá a la mitad del número original en 5 días. Si existen 100g de ^{210}Bi en el instante t=0, entonces la cantidad $f(t)$ restante después de **t** días está dada por $f(t) = 100 \cdot 2^{\frac{-t}{5}}$.

    a) ¿Qué cantidad resta después de 5 días? R/50g.

    b) ¿10 días? R/25g.

    c) ¿12,5 días? R/17,7g.

    d) Trace la gráfica de f desde t=0 hasta t=30.

32. En ciertas condiciones, la presión atmosférica **P**, en pulgadas a la altura de **h** pies está dada por $P = 29 \cdot e^{-0{,}000034h}$. ¿Cuál es la presión a una altura de 40 000 pies? R/7,44 pulg.

33. La cantidad inicial del isótopo del polonio ^{210}Po es de 50mg. La cantidad restante a los t días puede ser aproximada por $A = 50 \cdot e^{-0{,}00495t}$. Calcule la cantidad restante a los:

    a) 30 días. R/43,1.

    b) 180 días. R/20,51.

    c) 365 días. R/8,21.

34. Si el valor de los bienes raíces se incrementa a razón del $10\,\%$ por año, entonces, después de t años, el valor V de una casa comprada en P dólares está dada por $V(t) = P \cdot 1{,}1^t$. Si una casa fue comprada en \$80 000 en 1986,

a) ¿cuál será su precio en 1990? R/$117128.

b) ¿y en el año 2000? R/$303 800.

c) ¿ y en el año 2006? R/$538 200.

35. Si $1 000 se invierten el 6 % anual y el interés se capitaliza trimestralmente, encuentre el capital al final de:

a) 1 año. R/$1061,36.

b) 2 años. R/$1126,49.

c) 5 años. R/$1346,86.

d) 10 años. R/$1418,02.

36. Si $1 000 se invierten el 6 % anual y el interés se capitaliza mensualmente, encuentre el capital al final de:

a) 1 año. R/$1061,68.

b) 2 años. R/$1127,16.

c) 5 años. R/$1348,85.

d) 10 años. R/$1819,40.

37. Si $10 000 se invierten al 9 % anual capitalizado semestralmente, encuentre el tiempo requerido para que el capital exceda a:

a) $15 000. R/$5 años (4,61).

b) $20 000. R/$8 años (7,87).

c) $30 000. R/$12,5 años (12,48).

38. Un niño deposita $500 en una cuenta de ahorros que paga interés a una tasa de 6 % compuesto anual capitalizado semanalmente. ¿Cuánto tiene en la cuenta después de un año? R/$530,90.

39. Calcule el valor futuro de $100 000 a un año; al 32 % anual. R/$132 000.

40. Calcule el valor futuro de $100 000 a un año; al 32 % anual capitalizable trimestralmente. R/$136 048,90.

41. Hallar el valor futuro de $400 000 al 7 % capitalizable semestralmente en 70 años. R/$48 397 954,11.

42. ¿Cuál es el valor acumulado por $300 000 al 12 % durante 3 años, mediante el interés compuesto? R/$421 478,40.

43. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva anual, si depositando hoy \$2 500, se pueden retirar \$40 000 dentro de 15 años? R/20,30 %.

44. Si **n** es el número promedio de terremotos (en todo el mundo) en un año, cuya magnitud está entre R y R+1 (en la escala Richter), entonces $log\ n = 7,7 - 0,9R$.

    a) Resuelva para evaluar **n** en términos de R. R/$n = 10^{7,7-0,9R}$.

    b) Calcule n si R=4; R=5 y R=6. R/12 589; 1585 y 200.

45. La energía E (en ergs) liberada durante un terremoto de magnitud R está dada por la fórmula $log\ E = 1,4 + 1,5 \cdot R$.

    a) Despeje E en términos de R. R/$R = \frac{logE-1,4}{1,5}$.

    b) Calcule la energía liberada durante el famoso terremoto de Alaska de 1964, que registró 8,4 en la escala Richter. R/$E = 10^{14}$.

46. El isótopo radiactivo ^{210}Bi se desintegra conforme a la ley $Q(t) = k \cdot 2^{\frac{-t}{5}}$, en la que **t** está en días. Use logaritmo de base 2 para evaluar **t** en términos de Q y de k. R/$t = -5log_2(\frac{Q}{t})$.

47. El número N de bacterias en un cierto cultivo en el tiempo **t**, está dado por $N(t) = 10^4 3^t$. Use logaritmo de base 3 para determinar t en función de N. R/$t = log_3(\frac{N}{10^4})$

48. Resuelva la fórmula de crecimiento de Von Bertalanffy $y = a(1 - be^{-kt})$, para hallar **t** en términos de **y**, **a**, **b** y **k**. La fórmula resultante puede emplearse para calcular la edad de un pez a partir de la medición de su longitud. R/$t = -\frac{1}{k} \cdot ln(\frac{a-y}{ab})$.

49. La siguiente fórmula, que es válida para los terremotos en el este de Estados Unidos, relaciona la magnitud R del sismo con el área que lo rodea A (en millas cuadradas), que es afectada por el temblor.

$$R = 2{,}3log(A + 34000) - 7{,}5$$

    Resuélvala para evaluar A en términos de R. R/$A = 10^{\frac{R+7,5}{2,3}} - 34000$.

50. La semivida del radio es de 1600 años, es decir dada cierta cantidad de radio, la mitad se desintegrará en 1600 años. Si la cantidad inicial es q_0 miligramos (mg), puede mostrarse que la cantidad $q(t)$ constante después de **t** años está dada por $q(t) = q_0 \cdot 2^{kt}$. Despeje la variable k. R/$k = \frac{1}{t}log_2(\frac{q(t)}{q_0})$.

Bibliografía

[1] Araya R, Leonardo. Apuntes para el Curso de Biomatemáticas.

[2] Fernández, Flory y Roberto Solé. Matemáticas Financieras: notas técnicas y 200 ejercicios propuestos.

[3] Swokowski W, Earl. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.

[4] Valverde F, Luis. Elementos de Cálculo con Aplicaciones.