DOMINIO MÁXIMO DE UNA FUNCIÓN

Recordemos que:

$$10 \div 5 = 2, \text{ porque } 2 \cdot 5 = 10$$
$$-4 \div 2 = -2, \text{ porque } -2 \cdot 2 = -4$$
$$18 \div 3 = 6, \text{ porque } 6 \cdot 3 = 18$$

Entonces ¿cuál es el resultado de: $12 \div 0 =$?

Buscamos un número que multiplicado por cero nos de 12. Dada la propiedad absorbente del cero todo número multiplicado por cero da cero.
Por esta razón no podemos encontrar un número que multiplicado por cero de 12 podemos concluir que:

La división entre cero no esta definida

Recordemos también que:

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \text{Porque } 2 \cdot 2 = 4$$
$$\sqrt{9} = 3 \qquad \text{Porque } 3 \cdot 3 = 9$$
$$\sqrt{16} = 4 \qquad \text{Porque } 4 \cdot 4 = 16$$

Podrías decir, que la raíz cuadrada de un primer número, es un segundo número que multiplicado por si mismo dos veces se obtenga el primero.

Entonces ¿cuál es $\sqrt{-16}$?

Por lo anterior buscamos un número que multiplicado por si mismo dos veces nos de -16.

Un intento:

$$4 \bullet 4 = 16$$
$$-4 \bullet -4 = 16$$

Dado que multiplicar dos números positivos nos da un número positivo y multiplicar un número par de veces un negativo siempre nos da un positivo, no podemos encontrar un número que multiplicado por si mismo de un número negativo.

Podemos concluir que la raíz cuadrada, o en general de índice par, de un número negativo, no existe en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 1

Supongamos que se da una función tal que $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+6}$

¿Cuál es la imagen de -3?

$$f(-3)=\frac{-3+2}{2\cdot -3+6}$$
$$f(-3)=\frac{-1}{-6+6}$$
$$f(-3)=\frac{-1}{0}$$

$f(-3)$ No esta definida

Ejemplo 2

Supongamos que se da una función tal que $f(x)=\sqrt{x+9}$

¿Cuál es la imagen de -12?

$$f(-12)=\sqrt{-12+9}$$
$$f(-12)=\sqrt{-3}$$
$$f(-12)\notin IR$$

Podemos decir que en algunos casos la variable independiente no puede tomar cualquier valor.

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Se define función como una correspondencia entre dos conjuntos no vacíos A y B; ahora cuando $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$, diremos que dicha función es una <u>función real de variable real</u>

Es decir:

Una función real de variable real, es una función donde a las preimagenes siempre le corresponde una imagen que pertenece al conjunto de los números reales.

ESTUDIO DE DOMINIOS

Cuando Definimos una función una de las propiedades o características que ésta debía tener, es que todo elemento del dominio debería tener una y solo una imagen en el codominio, y en una función real ésta imagen debe pertenecer al conjunto de los números reales..

Ejemplo 3

Supongamos que f es una función definida de un conjunto A al conjunto $\mathbb{R}$, talque A$\subseteq \mathbb{R}$ y cuyo criterio es $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

La función descrita puede representarse simbólicamente así:

$$f : A \to IR$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

Puesto que A$\subseteq \mathbb{R}$ cabe la posibilidad de que x tome el valor de –3, dado que $-3 \in \mathbb{R}$.

Por lo que se daría la siguiente situación:

$$f(-3) = \frac{1}{(-3)^2 - 9} = \frac{1}{9-9} = \frac{1}{0}$$

Esta claro que $\dfrac{1}{0}$ no esta definido en el conjunto de los números reales, por lo que –3 no tendría imagen.

¿Pasará lo mismo con 3? Pruébelo usted.

Así podemos decir que:

> Analizar el dominio máximo de una función es encontrar todos aquellos valores que hacen que dicha función esté bien definida, basándonos en el criterio de la función.

Del ejemplo anterior diremos que el dominio de la función debe ser todos los números reales excepto el –3 y el 3. En forma simbólica:

$$D_f = IR - \{-3,3\}$$

Ejemplo 4

Determinar el dominio máximo de una función, si su criterio es $f(x)=\dfrac{2x+3}{2x-5}$.

R. / Como en el ejemplo f(x) es una expresión racional que tiene en su denominador una variable, debemos excluir de su dominio los valores que pueda tomar la variable que indefinan la expresión.

Por lo tanto debemos encontrar los valores que puede tomar la variable para que la expresión 2x-5 sea igual a cero.

$$2x-5=0$$

Por lo que nos dedicamos a despejar la variable, así:

$$2x-5=0$$
$$2x-5+5=0+5$$
$$2x=5$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2x=\frac{1}{2}\cdot 5$$
$$x=\frac{5}{2}$$

Por lo tanto el valor $\frac{5}{2}$ hay que excluirlo del dominio, ya que nos hace cero la expresión del denominador.

Entonces el dominio será:

$$D_f = IR-\left\{\frac{5}{2}\right\}$$

Ejemplo 5

Determinar el dominio máximo de una función si su criterio es $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$.

R./

$$x^2-4=0$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm\sqrt{4}$$
$$x=\pm 2$$

$$D_f = IR-\{-2,2\}$$

Ejemplo 6

Determinar el dominio máximo de una función si su criterio es $f(x)=\sqrt{x-5}$.

R. / Como en el ejemplo f(x) es una expresión radical, de índice par y que el subradical hay una variable, debemos incluir en el dominio solamente todos los valores que hagan esa expresión positiva o cero, es decir que hagan verdadera la expresión: $x-5\geq 0$

Por lo que nos dedicamos a despejar la variable, así:

$$x-5\geq 0$$
$$x\geq 5$$

Entonces el dominio son todos los valores para x mayores o iguales a 5, lo que podemos expresar como un intervalo.

En forma simbólica:

$$D_f=\left[5,+\infty\right[$$

Ejemplo 7

Determinar el dominio máximo de una función si su criterio es $f(x)=\sqrt{7x-14}$.

R./

$7x-14\geq 0$

$7x\geq 14$

$x\geq \dfrac{14}{7}$

$x\geq 2$

$$D_f=\left[2,+\infty\right[$$

Ejemplo 8

Determinar el dominio máximo de una función si su criterio es $f(x)=\sqrt{12-x}$.

R. /

$$12-x\geq 0$$
$$12+-12-x\geq 0+-12$$
$$-x\geq -12$$
$$-1\cdot -x\leq -1\cdot -12$$
$$x\leq 12$$

Recordemos que cuando multiplicamos los extremos de la desigualdad por un número negativo, cambia la dirección de la desigualdad.
Por lo que en este caso el dominio será el conjunto de todos los números menores o iguales a 12.

En forma simbólica:

$$D_f = \left]-\infty, 12\right]$$

Ejemplo 9

Determinar el dominio máximo de una función si su criterio es $f(x) = 3x + 12$.

R. / Puesto que este criterio no existe variable en el denominador, ni es una expresión radical con variable en el subradical, podemos decir que es una función continua, por lo que x puede tomar cualquier valor y siempre le corresponderá a la preimagen una imagen en el conjunto de los números reales.
Para este caso:

$$D_f = IR$$

Ejercicios

A. Determine el dominio máximo para cada función:

1) $f(x) = \dfrac{7}{5x-5}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{5x-\frac{3}{4}}$ 3) $f(x) = \dfrac{3x+5}{2x+3}$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2-32}$ 5) $f(x) = \dfrac{5x+3}{5x^2-125}$ 6) $f(x) = \dfrac{3x}{5x+2}$

7) $f(x) = 3x+5$ 8) $f(x) = \dfrac{9m}{3x+5}$ 9) $f(x) = \dfrac{5x^2+3}{x-\frac{3}{4}}$

10) $f(x) = \dfrac{6x-9}{x^2-49}$ 11) $f(x) = \dfrac{5x-13}{2x^2-162}$ 12) $f(x) = x^2-6x+5$

B. Determine el dominio máximo para cada función:

1) $f(x) = \sqrt{x-7}$ 2) $f(x) = \sqrt{5-x}$ 3) $f(x) = \sqrt{2x-4}$

4) $f(x) = \sqrt{-9+x}$ 5) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ 6) $f(x) = \sqrt{2x+10}$

7) $f(x) = \sqrt{3x-12}$ 8) $f(x) = \sqrt{21-3x}$ 9) $f(x) = \sqrt{x-2}$

10) $f(x) = \sqrt{10-2x}$ 11) $f(x) = \sqrt{24-3x}$ 12) $f(x) = \sqrt{5x+105}$

BIBLIOGRAFIA.

- Corrales Mario –Obando Álvaro, Matemática funciones, 1984.
- Howard E. Taylor y Thomas L. Wade, Geometría analítica bidimensional, 1974.
- Raymond A. Barnett, Precalculo funciones y graficas, 1999.
- Reinaldo Jiménez Santamaría, Introducción a la teoría de las funciones, Serigrafiaos, 2003
- Roxanna Meneses Rodríguez, Enseñanza y aprendizaje, 11mo. 1991.
- William Wernick, Geometría analítica 1970.
- Wooton Beckenbach Fleming, Geometría analítica moderna, 1977.