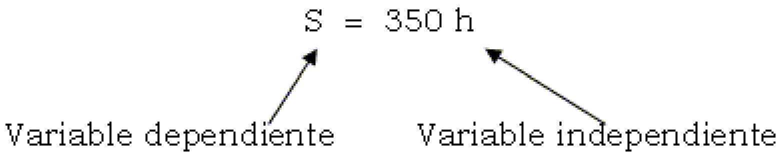
VARIABLE DEPENDIENTE Y VARIABLE INDEPENDIENTE

Analicemos hechos cotidianos que involucran dos variable. Por ejemplo

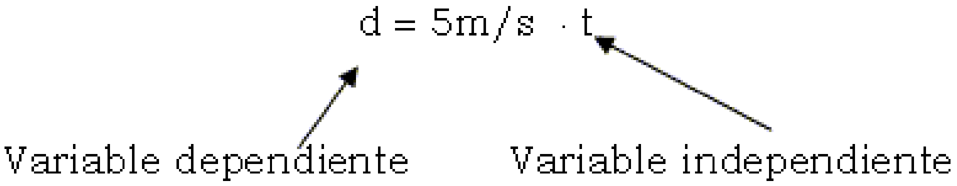
Ejemplo 1:
Si se paga a 350 colones la hora. El salario de un trabajador depende de las horas que trabaje.
El salario será igual a 350 por el número de horas trabajadas.
Si S= salario y h= horas trabajadas entonces



Esto significa que el valor de la variable *s* depende del valor del variable h Entre más horas trabaje mayor es su salario.

Ejemplo 2:
Un ciclista viaja a una velocidad constante durante cierto tiempo, recorre una distancia igual al producto de la velocidad por el tiempo transcurrido. Con la formula d = v·t. Esto significa que si el cuerpo viaja a 5 m/s se puede determinar cual es la distancia recorrida con solo saber el tiempo trascurrido.

La distancia depende de la duración (tiempo) del recorrido. Si d= distancia y t= tiempo de recorrido entonces

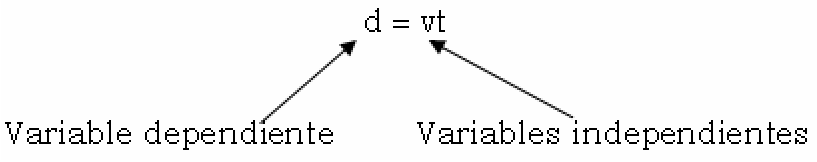


La relación entre dos variables, tal que el cambio en una afecte a la otra, se puede llamar dependencia.

Despeje de Variable

De una fórmula original se puede derivar al menos otra más. Por ejemplo:

Ejemplo 3:
La fórmula del movimiento lineal casi siempre se escribe



Supongamos que un determinado problema nos plantea como variable dependiente la velocidad v, entonces simplemente despejamos

$$v = \frac{d}{t}$$

Ejemplo 4:

El área de un triángulo es igual al producto de la base por la altura dividido por 2.

$$A = \frac{bh}{2}$$

Si la variable dependiente fuese h, quedaría la fórmula así:

$$A = \frac{bh}{2}$$
$$2A = bh$$
$$\frac{2A}{b} = h$$
$$h = \frac{2A}{b}$$

Si la variable dependiente fuera b, quedaría la fórmula así $b = \frac{2A}{h}$

Ejercicio 1:

1. Obtener nuevas fórmulas de las expresiones siguientes, de acuerdo con la indicación dada.

a- $H = 2y + 2x$, se requiere variable dependiente y.

b- $C = 2\pi \mathrm{r}$, se requiere variable dependiente r.

c- $A = \left(\frac{B+b}{2}\right)h$, se requiere variable dependiente b.

d- $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, se requiere variable dependiente b.

e- $h = \frac{r}{2} - 8$, se requiere variable dependiente r.

f- $D = \frac{\mathrm{n(n-3)}}{2}$, se requiere a "n" como variable independiente.

g. $\mathrm{A} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, se requiere a "l" como variable independiente.

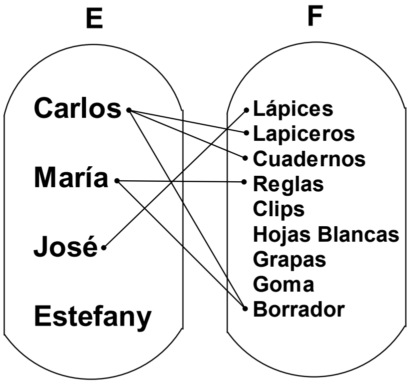
CONCEPTO DE CORRESPONDENCIA

Para entender el concepto analicemos la siguiente situación:
Ejemplo 5

"Cuatro estudiantes, Carlos, María, José y Estefany, ingresan a la librería de la cooperativa de estudiantes de su institución, que entre otras cosas ofrece: lápices, lapiceros, plumas, cuadernos, reglas, borradores, gomas, hojas blancas, fólder, clips, grapas, etc. Luego de observar lo que la librería les ofrecía Carlos compró lapiceros, un cuaderno y un borrador; María compró dos borradores y una regla; José compró un lapicero y Estefany no compró".

Podemos anotar que los estudiantes forman un conjunto E y los útiles que ofrece la librería el conjunto F.

Lo anterior lo podemos diagramar de la siguiente forma:



De esta forma podemos deducir que:

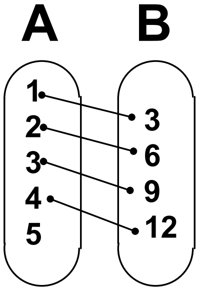
> Una correspondencia es una relación que se establece entre dos conjuntos por medio de la cual a uno o varios elementos del primer conjunto se le asigna o asocia uno o varios elementos del segundo conjunto.

Note que en el ejemplo Estefany no compró nada, situación que puede ocurrir en una correspondencia.
En el ejemplo anterior la relación de correspondencia es comprar.

Una correspondencia puede estar dada por una situación como la anterior, pero también puede relacionar conjunto de números por medio de una operación.

Ejemplo 6:

Imaginemos que existe un conjunto A={1,2,3,4,5} y el conjunto B={3, 6, 9, 12} y su correspondencia es el triple de un número, entonces se relacionan así: a 1 le corresponde 3, a 2 le corresponde 6, a 3 le corresponde 9, a 4 le corresponde 12. Como en el conjunto B no esta el triple de 5, a ese número no le corresponde ninguno del B.

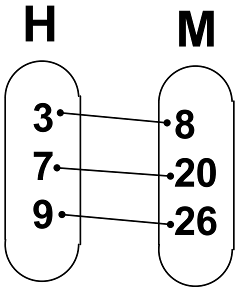


Ejercicio 2:

1. Establezca una relación entre el conjunto A={1,2,3} y el conjunto B={2,4,6,8}, si se establece que su correspondencia es el doble.

2. Establezca una relación entre el conjunto A={1,3,5} y el conjunto B={3,5,7,9,1,13}, si se establece que su correspondencia es el doble más uno.

3. ¿Cuál es la correspondencia entre el conjunto H y el conjunto M?



4. A 10 estudiantes se les pregunta ¿cuál es su color favorito? De lo anterior analice y determine: Cuales son los dos conjunto, y cuales sus elementos, cual es la correspondencia? Haga la pregunta a diez de sus compañeros y dibuje un diagrama de lo obtenido?

CONCEPTO DE FUNCION

Analicemos un ejemplo en el cual usted pronto estará involucrado y donde se encuentra implícito el concepto de función.

Ejemplo 7:

"Un grupo de 25 estudiantes de undécimo año, realiza la primera prueba escrita del primer periodo de este año, de matemáticas"
Supongamos que el conjunto A esta formado por los 25 estudiantes del grupo y el conjunto B por las posibles notas enteras que se pueden obtener en una escala de 1 a 100.

A = {Ana, Beatriz, Carmen, Denia, Estefany, Francini, Gretel, Hazle, Ileana, Jeannet, Karol, Lorena, María, Alvaro, Bolivar, Carlos, Dagoberto, Eduardo, Francisco, Geovanny, Harol, Ignacio, José, Kenneth, Luis}

B = {1,2,3,4,...,98,99,100} (números entre el 1 y el 100 inclusive

La relación de correspondencia: nota obtenida en examen.
De acuerdo con lo anterior hagamos un análisis de las siguientes situaciones:

- Todo alumno debe tener una y solo una nota

- Un alumno no puede tener mas de una nota
- Pueden haber notas, que ningún alumno haya obtenido.
- Pueden haber varios alumnos, o todos, que hayan obtenido la misma nota

Bajo las condiciones diremos que se ha establecido una correspondencia entre el conjunto de los alumnos y el conjunto de las notas, esta correspondencia se le llama **función**.

Entonces podemos definir función de la siguiente manera:

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos A y B no vacíos, en la cual **para todo** elemento que pertenece al conjunto A, existe **un solo elemento y solo uno**, que pertenece al conjunto B al cual se le asocia o corresponde.

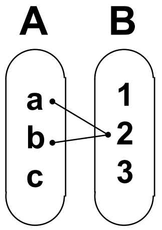
Para simbolizar que se ha establecido una función f, de un conjunto A en un conjunto B usaremos la siguiente notación:

$$f : A \rightarrow B$$

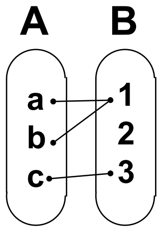
Ejercicio 3

De los diagramas que se presentan a continuación, diga cuales representan una función y cuáles no, justificando cada una de las respuestas:

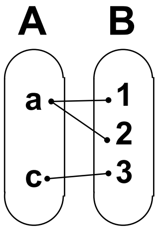
1.



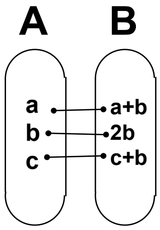
2.



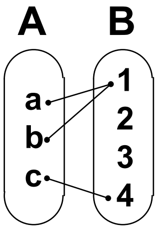
3.



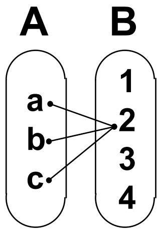
4



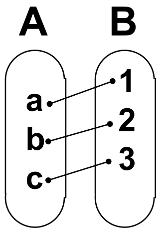
5



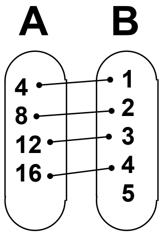
6



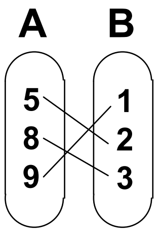
7



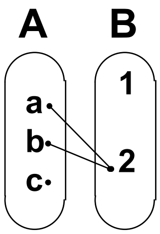
8.



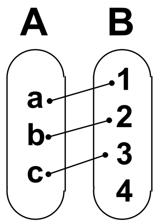
9



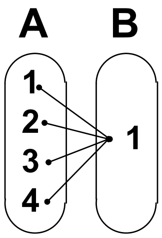
10.



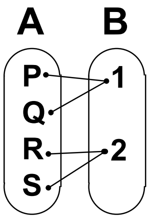
11.



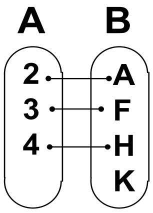
12.



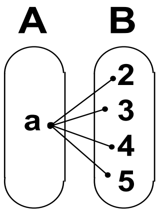
13.



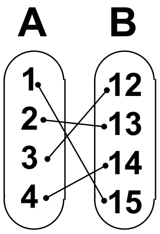
14.



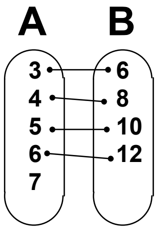
15.



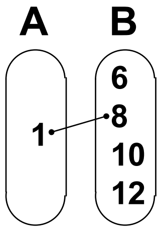
16.



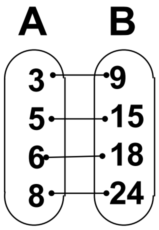
17.



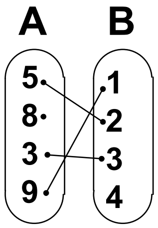
18.



19.



20.



21. Sea A = {p, q, r, s} y B= {2, 4, 6, 8, 10, 12}. Escriba cinco posibles relaciones entre A y B que correspondan a una función.

CRITERIO DE LA FUNCIÓN

El siguiente grado de abstracción de lo concreto consiste en examinar, no una dependencia dada en un ejemplo específico, s = 350t, sino la correspondencia general de "y" con respecto a "x", expresado en la fórmula abstracta:

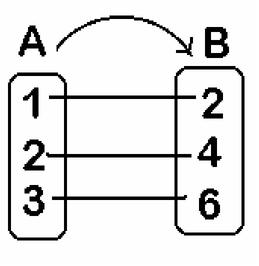
$$y = f(x)$$

Esta fórmula establece que la magnitud "y" es de modo general, en función de "x". La notación $y = f(x)$ se lee "y" es una función de "x" o "y" es igual a f de x. (esta notación no significa f por (x)). Obviamente en lugar de "x" y "y" hubiésemos podido emplear cualesquiera dos variables, escrita en la forma:

Variable dependiente = f (variable independiente)

Ejemplo 8

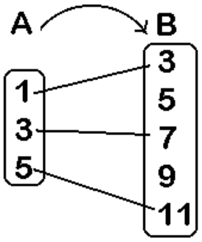
Si A = {1, 2, 3} y B = {2, 4, 6} y su correspondencia es el doble.



Entonces: $f(x) = 2x$

Ejemplo 9

Si A = {1, 3, 5} y B = {3, 5, 7, 9, 11} y su correspondencia es el doble más uno.

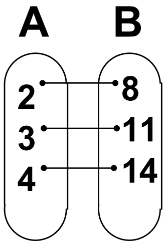


Entonces: $f(x) = 2x + 1$

Ejercicios 4:

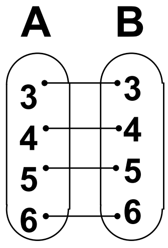
A. Determine el criterio de la función, para cada correspondencia:

1.



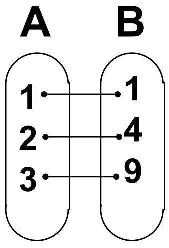
f(x)= ________

2.



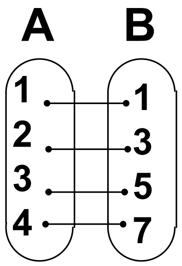
f(x)= ________

3.



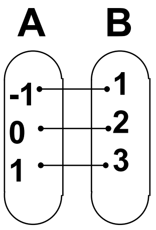
f(x)= ________

5.



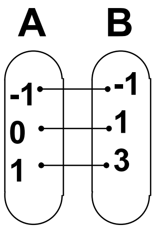
f(x)= ________

4.



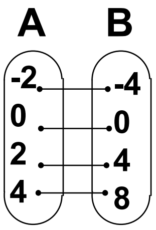
f(x)= ________

5.



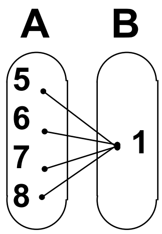
f(x)= ________

6.



f(x)= ________

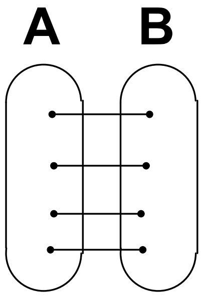
8.



f(x)= ________

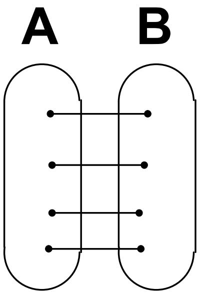
B. Complete los diagramas con valores de su elección y con el criterio dado

1.



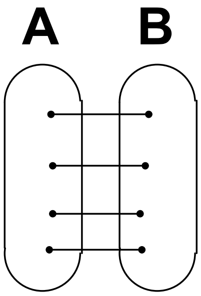
$f(x)= 2x+1$

2.



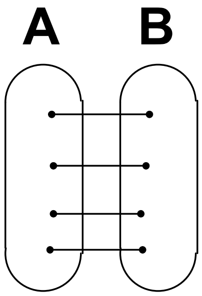
$f(x)= 2x^2$

3
.



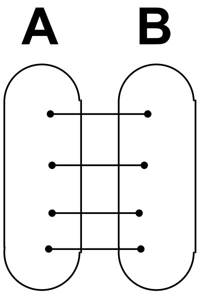
$f(x)= x - 5$

4.



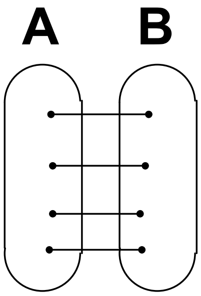
$f(x)= -3x$

5.



$f(x)= x^3 -8$

6
.



$f(x)= x$

CONCEPTOS BASICOS DE FUNCIÓN

Dada una función $f : A \to B$ se define:

- El conjunto A se llama conjunto de partida o **dominio**, se puede representar como D_f.

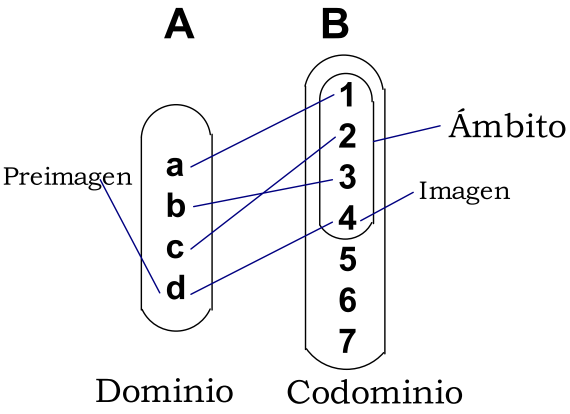
- Al conjunto B se llama conjunto de llegada o **codominio**.

- Se llaman **preimágenes** a los elementos del conjunto de partida o dominio.

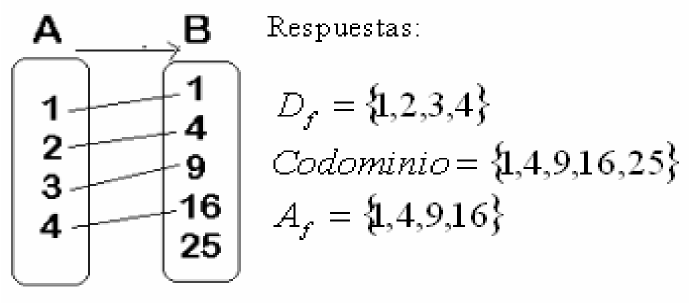
- Se llaman **imágenes** a los elementos del conjunto de llegada o codominio que están asociados a una preimagen, mediante el criterio de la función.

- Se llama **rango o ámbito** de una función al conjunto formado por las imágenes. Este conjunto es un subconjunto del codominio, se puede representar como R_f ó A_f respectivamente.

Para ilustrar los conceptos anteriores usaremos lo que se denomina Diagramas de Venn-Euler.



Ejemplo 10
Analizar el siguiente diagrama que representa una función y determinar el dominio, codominio y el ámbito.



Respuestas:

$D_f = \{1,2,3,4\}$

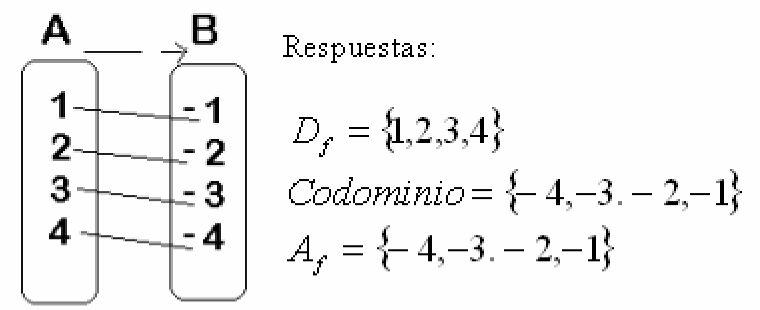
$Codominio = \{1,4,9,16,25\}$

$A_f = \{1,4,9,16\}$

Recuerde que los elementos del dominio se llaman preimagenes y los elementos del ámbito se llaman imágenes.

Ejemplo 11:

Analizar el siguiente diagrama que representa una función y determinar el dominio, codominio y el ámbito.



Respuestas:

$D_f = \{1,2,3,4\}$

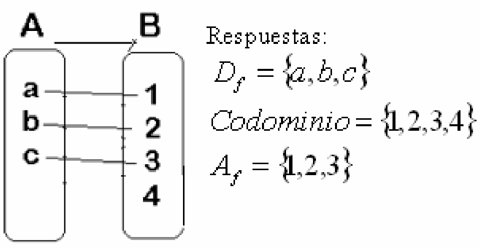
$Codominio = \{-4,-3.-2,-1\}$

$A_f = \{-4,-3.-2,-1\}$

Dado que es posible que el codominio y el ámbito estén compuestos por el mismo conjunto de elementos, suele pensarse que codominio y ámbito es lo mismo, el concepto y los ejemplos anteriores nos permiten darnos cuenta que pensar así es un error.

Ejemplo 12

Analizar el siguiente diagrama que representa una función y determinar el dominio, codominio y el ámbito.



Respuestas:

$D_f = \{a,b,c\}$

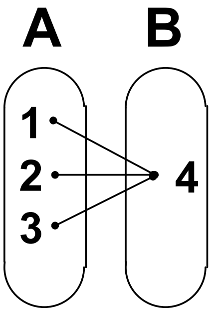
$Codominio = \{1,2,3,4\}$

$A_f = \{1,2,3\}$

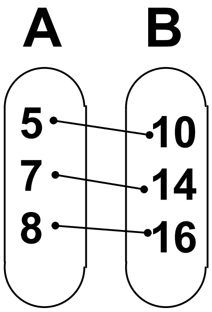
Ejercicios 5:

Analizar el siguiente diagrama que representa una función y determinar el dominio, codominio y el ámbito.

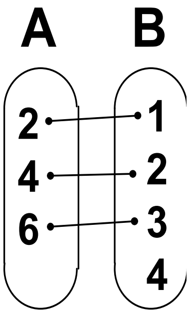
1



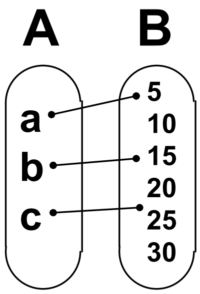
2



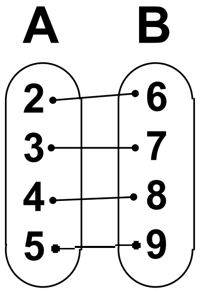
3.



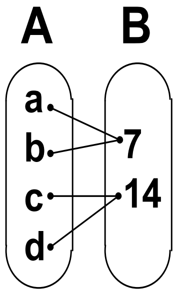
4.



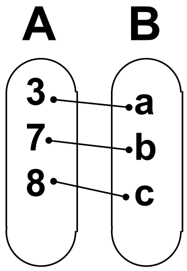
5.



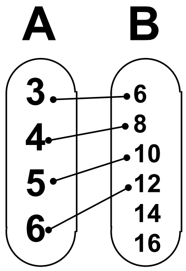
6.



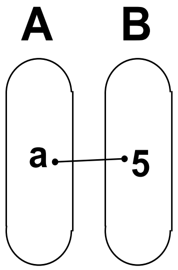
7



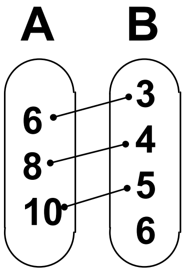
8



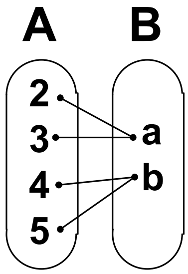
9



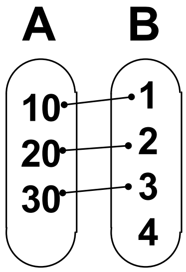
10



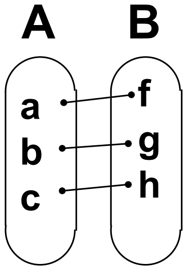
11



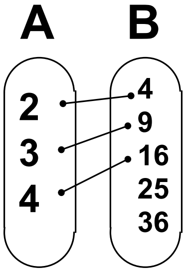
12



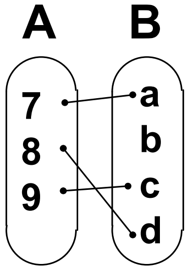
13



14



15



CALCULO DE LA IMAGEN

Debemos recordar que el conjunto de partida esta formado por las preimagenes y, se llama dominio, las preimagenes son los valores que toma la variable independiente.

Ejemplo 13:

Un carpintero gasta ¢350 por cada silla que haga más un monto fijo de ¢2000 por día. ¿cuánto gastará si hace 2 sillas por día? ¿Cuánto gastará si hace 4, 6 ó 8 sillas por día?

Para este ejemplo, x representa cada silla y f(x) el costo de fabricarla, lo que significa que el costo es igual a multiplicar 350 por cada silla y sumarle el gasto fijo. Es decir:

$$f(x) = 350x + 2000$$

Por lo que el valor de la variable independiente x para la primera pregunta es 2. Para encontrar la respuesta **sustituimos** el valor de dicha variable en el criterio de la función.

$$f(2) = 350 \cdot 2 + 2000$$

$$f(2) = 700 + 2000$$

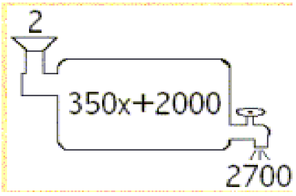
$$f(2) = 2700$$

Entonces si hace solamente 2 sillas en un día, gastaría ¢2700 en hacerlas.
De esto podemos decir que 2 es la preimagen de 2700.

Además:
f(4) = 3400 *f(6) = 4100* *f(8) = 4800* Compruébelo.

¿Podríamos decir, entonces, al carpintero que entre más sillas haga por día será mejor para su economía? Si. Justifique esta respuesta.

Calcular la imagen de una función conociendo la preimagen y el criterio, es **evaluar** el criterio de la función con el valor de la preimagen que se tiene.



Ejemplo 14:

Sea f: IR → IR tal que *f(x)*= $x^2 - 6x + 7$
¿Cuál es la imagen de 10?

Dado que nos preguntan por la imagen esto significa que 10 es una preimagen por lo que x = 10

$$f(10) = 10^2 - 6 \cdot 10 + 7$$

$$f(10) = 100 - 60 + 7$$

$$f(10) = 47$$

Ejercicio 6:
Determine la imagen en cada caso, luego dibuje un diagrama que represente la función.

1. Sea f: IR → IR tal que *f(x)*= $3x - 2$ Hallar:

a). f(3) b). f(2) c). f(0) d). f(10) e). f(-1) f). f(-4) g). f(-3) h). f(4) i). f(5) j). f(7)

k). f(-5) l). f(-9)

2. Sea f: IR $\rightarrow$ IR tal que $f(x)= x^2 - 6x + 7$ ¿Cuál es la imagen de 7?

3. Sea f: IR $\rightarrow$ IR tal que $f(x)= 3x^2 - x + 2$ ¿Cuál es la imagen de 9?

4. Para elaborar empanadas una señora gasta ¢30 por cada empanada que hace además de ¢750 por día en gastos fijos. A. ¿Cuánto gastará elaborando 25 empanadas? B. ¿Cuánto gastará elaborando 50 empanadas?
En este caso el criterio de la función de costo es C(x)= 30x+750.

5. En una fábrica gastan ¢1275 por cada par de zapatos elaborado y tiene un gasto de ¢13500 por día. ¿Cuanto gastan en la elaboración de 350 pares de zapatos? En este caso el criterio de la función de costo es Z(x)= 1275x+13500.

6. Un carpintero gasta ¢1000 en materiales por cada silla elaborada más un gasto fijo de ¢2300 por día ¿Cuánto gastara elaborando 56 sillas en un día?

7. Un Viejo ferry que transporta personas de un lado al otro del Río Coromoto, gasta ¢25 por persona que transporte y un litro de aceite por día. El aceite cuesta ¢1384 el litro. ¿Cuánto gastó el dueño del ferry hoy, si transporto 500 personas?

8. Para bajar un balde al fondo de un pozo se utilizan un sistema de palancas que necesitan 4 m. de cuerda para poder colocarlo sobre la boca del pozo. ¿Cuánta cuerda se necesita si se desea bajar el balde a 12 m. de profundidad del pozo? En este caso tomaremos el criterio de la función como $P_{(x)}= x + 4$.

9. Un joven de décimo año, es contratado por su padre, y le pagará 45000 colones por atender la panadería de su familia durante sus vacaciones. Pero además le pagará además 50 colones por cada nuevo cliente, que por su forma de atender regrese a comprar una segunda vez. Y logró que 25 nuevos clientes regresaran por segunda vez. ¿Cuánto ganó el joven durante ese tiempo?

10. Un modelo de costo para un producto establece que tiene un costo fijo de ¢17500 y un costo por unidad de ¢348. ¿Qué costo tendrá fabricar 23 productos? P(x)=348x+17500

11. Una compañía hotelera de clase media realiza un análisis que establece que el costo diario por turista es de ¢975 más un cargo fijo de ¢20000. ¿Cuál será el costo de recibir a 15 turistas en un día? Si la tarifa diaria es de ¢3500 por turista ¿tendrá ganancia ese día el hotelero?

12. Si para cierto producto fabricarlo cuesta ¢30 por unidad más ¢5000 colones en gasto fijo y cada producto es vendido en ¢250. ¿Cuánto costara fabricar 20 unidades de ese producto? Existirá utilidad al fabricar esa cantidad de unidades?

13. El costo de producir un artículo está dado por y=3x+600 y se vende a ¢40 cada unidad.
¿Cuánto cuesta producir 21 artículos? ¿Cuánto es la utilidad por hacerlos?

14. En la terminar una señora se dedica a vender empanadas. Para elaborarles ella gasta ¢15 por cada una más ¢2300 en otros gastos diarios necesarios para su elaboración y venta. Vende cada empanada a ¢50. ¿Cuánto le cuesta elaborar 30 empanadas y cuánto obtiene de utilidad en su venta? C(x)=15x+2300

CALCULO DE LA PREIMAGEN

Al conjunto de elementos del codominio que le corresponde una preimagen, se llama ámbito.

Ejemplo 15:

El acueducto rural de Venecia, cobra ¢80 por cada m^3 de agua que se gaste, más ¢1120 por mes por concepto de mantenimiento de cañería. Si el recibo de este mes fue de ¢2960 ¿cuántos m^3 de agua se gastaron?

Para este ejemplo, *x* representa cada m^3 de agua que se gasta y f(x) el monto del recibo durante un mes, esto significa que el monto a pagar en un mes por concepto de agua es igual a multiplicar 80 por cada m^3 que se gaste y sumarle el gasto fijo por mantenimiento de cañería. Es decir:

$$f(x) = 80x + 1120$$

Por lo que si en un mes se paga ¢2960, esto quiere decir que el valor de la variable dependiente es ¢2960, por lo tanto f(x) =2960, para determinar el valor de la variable independiente sustituimos el valor de f(x) y despejamos el valor de *x*

$$2960 = 80x + 1120$$

$$2960 - 1120 = 80x$$

$$1840 = 80x$$

$$\frac{1840}{80} = x$$

$$23 = x$$

Como x = 23, entonces durante ese mes se gastaron 23 m^3 de agua.
Determine, según el ejemplo, anterior ¿cual sería la cantidad de m^3 de agua que se gastan si el monto fuera de ¢1920? ¿y si fuera de ¢5120?

Para calcular la preimagen de una función, conociendo la imagen y el criterio, se **iguala** el criterio de la función con la imagen que se tiene. Luego de la ecuación que se forma, se determina el valor de la variable, mediante el despeje.

Ejemplo 16

Sea f: IR $\rightarrow$ IR tal que $f(x) = x^2 - 6$ ¿Cuál es la preimagen de – 5 ?
Dado que nos preguntan por la preimagen esto significa que –5 es una imagen por lo que f(x) = –5

$$-5 = x^2 - 6$$

$$-5 + 6 = x^2$$

$$1 = x^2$$

$$\sqrt{1} = x$$

$$\pm 1 = x$$

Las preimagenes de –5 son –1 y 1. Para este caso recordemos que en una función una imagen debe tener al menos una preimagen, aunque puede tener más de una.

Ejemplo 17

Sea f: IR $\rightarrow$ IR tal que $f(x) = 3x + 5$ ¿Cuál es la preimagen de 11?
Dado que nos preguntan por la preimagen esto significa que 11 es una imagen por lo que f(x) = 11

$$11 = 3x + 5$$

$$11 - 5 = 3x$$

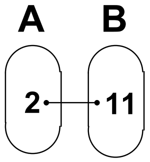
$$6 = 3x$$

$$\frac{6}{3} = x$$

$$2 = x$$

La preimagen de 11 es 2.

Ilustrado en un diagrama de Venn-Euler



Ejercicio 7

Determine la preimagen en cada caso:

1. Sea f: IR → IR tal que *f(x)*= *5*x +12. Hallar la preimagen para cuando:

a). f(x) = 27 b). f(x) =47 c). f(x) = – 3 d). f(x) = – 13

2. Sea f: IR → IR tal que *f(x)*= *2*x^2 +7. Hallar la preimagen para cuando:

a). f(x) = 15 b). f(x) =169 c). f(x) = 57 d). f(x) = 39

3. Sea f: IR → IR tal que *f(x)*= x^2 +7 ¿Cuál es la preimagen de 7?

4. Sea f: IR → IR tal que *f(x)*= *3*x^2 +2 ¿Cuál es la preimagen de 77?

5. Un fabricante ha determinado que la función de costo de su producto esta determinada por f(x)= 2x^3 – 1250, donde *x* representa cada unidad que se fabrica por día. Si el gasto de hoy es fue de ¢842 500. ¿Cuántas unidades de ese producto fabricaron?

6. Para elaborar pasteles una señora gasta ¢350 por cada pastel que hace además de ¢1 150 por día en gastos fijos. Si sabemos que el día de hoy gasto ¢16 200 ¿cuántos pasteles habrá elaborado? En este caso el criterio de la función de costo es C(x)= 350x+1150

7. En una fábrica gastan ¢1 275 por cada par de zapatos elaborado y tiene un gasto de ¢13 500 por día. Si en un día gasto ¢64 500 ¿cuántos zapatos habrá elaborado? En este caso el criterio de la función de costo es Z(x)= 1275x+13500.

8. Un carpintero gasta ¢1000 en materiales por cada silla elaborada más un gasto fijo de ¢2300 por día. Si el último día del mes gasto ¢35 300 ¿cuántas sillas habrá elaborado?

9. Un Viejo ferry que transporta personas de un lado al otro del Río Colorado, gasta ¢25 persona que transporte y un litro de aceite por día. El aceite cuesta ¢1384 el litro. Si el gasto de hoy fue de ¢3509 ¿cuántas personas transportaron hoy?

10. Un modelo de costo para un producto establece que tiene un costo fijo de ¢17500 y un costo por unidad de ¢348. Si es costo total de fabricar algunas unidades de ese producto fue de ¢22720 ¿Cuántas unidades se fabricaron?
P(x)=348x+17500

11. Una compañía hotelera de clase media realiza un análisis que establece que el costo diario por turista es de ¢975 más un cargo fijo de ¢20000.
¿Cuánto turistas llegaron hoy si es gasto del día fue de ¢42425?

12. Si para cierto producto fabricarlo cuesta ¢30 por unidad más ¢5000 colones en gasto fijo. ¿Cuántas unidades se fabricaron si el costo fue de ¢6500?

13. El costo en dólares de producir un artículo está dado por y=3x+600 ¿Cuántos se pueden hacer si se tiene un presupuesto de 720 dólares?

14. Un joven de décimo año, es contratado por su padre, y le pagará 45000 colones por atender la panadería de su familia durante sus vacaciones. Pero además le pagará además 50 colones por cada nuevo cliente, que por su forma de atender regrese a comprar una segunda vez. Si su padre al final de las vacaciones le pagó 47250 colones. ¿Cuántos nuevos clientes logró el joven que regresara por segunda vez?

BIBLIOGRAFIA.

- Corrales Mario –Obando Álvaro, Matemática funciones, 1984.
- Raymond A. Barnett, Precalculo funciones y graficas, 1999.
- Reinaldo Jiménez Santamaría, Introducción a la teoría de las funciones, Serigrafiaos, 2003
- Roxana Menneses Rodríguez, Enseñanza y aprendizaje, 11mo. 1991.
- Valverde Fallas, Luis Matemática elemental con aplicaciones, 1997.