LÍMITES

Definición:

Si los Valores de *f(x)* se aproximan al número k, conforme los valores de *x* se aproximan al número *n*, se dice que *f(x)* tiene el limite *k* conforme *x* tiende a *n*, y se exprese $\lim\limits_{x \to n} f(x) = k$.

Ejemplo 1:

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, de dominio $\mathbb{R} - \{2\}$ y fijamos nuestra atención en el valor de x=2.
Al sustituir el valor de x por 2, la función se indefine. Por la definición de límite dada, nos interesa saber el comportamiento de *f(x)* cuando los valores para *x* se acercan a 2.

Con este fin construimos una tabla de valores con los números cercanos al 2 por la izquierda y por la derecha en la recta numérica:

Por la izquierda Por la Derecha

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
f(x)	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	?	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5

En forma intuitiva podemos afirmar que a medida que los valores para *x* se acercan al 2 por la izquierda los valores de *f(x)* se acercan al 4 y a medida que los valores de *x* se acercan a 2 por la derecha, los valores de *f(x)* se acercan de 4.

Por lo que podemos afirmar que 4 es el límite de *f* cuando "*x* tiende a 2" y lo denotamos $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Ejemplo 2:

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{si } x \neq -3 \\ -5 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

La definición de la función nos dice que para los valores de *x* diferentes a -3, utilizaremos el criterio de asociación $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, que podemos expresar gracias a la manipulación algebraica, como:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = x - 3$$

En las siguientes tablas se ilustra algunas imágenes para valores de *x próximos a* x= -3, por la derecha y la izquierda respectivamente:

x	-4	-3,5	-3,3	-3,2	-3,1	-3	-2,9	-2,7	-2,5	-2,1	-2
f(x)	-7	-6,5	-6,3	-6,2	-6,1	-6	-5,9	-5,7	-5,5	-5,1	-5

De la información recopilada podemos concluir que, cuanto más cerca estemos de *x=-3*, más cerca está *f(x)* de -6 y escribimos $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6$

Ejemplo 3:

Consideremos una función $f(x)=x^2+5$, de dominio $\mathbb{R}$, y prestamos mayor atención al valor particular de *x=2*. Al sustituir x, la imagen de 2 es 9. Es evidente que para el valor de x que se acerquen a 2 por la derecha o por la izquierda, los valores de *f(x)* ser acerquen por la derecha o la izquierda a 9. Entonces $\lim_{x\to 2} x^2+5=9$

De los ejemplos anteriores podemos ilustrar tres situaciones que se pueden presentar con los límites:
1. La función *f* no este definida en el punto al cual tiende el límite, pero éste existe.
Es decir:
$\lim_{x\to n} f(x)=k$, pero $f(n)$ no esta definido.

2. La función *f* está definida en el punto al cual tiende el límite, el límite existe y es diferente a la imagen de la función en el punto.
Es decir:
$\lim_{x\to n} f(x)=k$, y $f(n)=a$, donde $a\neq k$

3. La función *f* está definida en el punto al cual tiende el límite, el límite existe y es igual a la imagen de la función en el punto.
Es decir:
$\lim_{x\to n} f(x)=k$, y $f(n)=k$

Todo esto no induce a afirmar que en los límites nos interesa el comportamiento de *f(x)* cuando *x* se "aproxima" a un punto "determinado" y no lo que pasa con *f(x)* en el mismo punto.

El los ejemplos expuestos hasta el momento, el límite "siempre ha existido"; esto quiere decir que *f(x)* se "aproxima" a *un mismo valor*, tanto por la derecha como por la izquierda.
Sin embargo, se debe tener cuidado ya que éste, no necesariamente es el comportamiento de toda función.

Ejemplo 4:

Determinar el límite, si existe, de *x* cuando tiende a 2, para $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si x} \rangle\ 2 \\ x-1, & \text{si x} \langle\ 2 \end{cases}$

La definición de la función utiliza el criterio de asociación $f(x)=x+1$ para los valores de x que sean superiores a 2. Es decir, para valores de *x* que se encuentren a la derecha de 2.

Así mismo, se hace uso del criterio $f(x)=x-1$ para los valores inferiores a 2. Es decir los valores de *x* que se encuentran a la izquierda de 2.

Tomando en cuenta la anterior construimos las respectivas tablas de los valores a la derecha e izquierda de *x.*

x	1,2	1,25	1,50	1,75	1,999	2	2,0001	2,001	2,75	2,80	2,99
f(x)	0,2	0,25	0,50	0,75	0,999	?	3,0001	3,001	3,75	3,80	3,99

De los resultados obtenidos inferimos que entre mas cerca de la derecha estemos de 2, *f(x)* se "aproxima" cada vez más al valor de 1. Sin embargo, *f(x)* "tiende" a 3 si x se aproxima 2 por la izquierda. Como *f(x)* no se "aproxima" por la derecha y por la izquierda al mismo número decimos que "no existe el límite de f cuando x tiende a 2".

LIMITES UNILATERALES

Hemos dicho que si al estudiar el comportamiento de *f(x)* cuando se aproxima a un valor n, no se obtiene el mismo valor, por la derecha y por la izquierda, entonces no existe el límite f en n.
Sin embargo, *f(x)* "tiende" a un determinado valor por la derecha y a uno diferente por la izquierda. Decimos que en este caso que existen los límites unilaterales, aunque el limite de la función en el punto a no existe.
Hacemos uso de una notación especial para poner de manifiesto esto:

Decir que $\lim\limits_{x \to n+} f(x) = k$ significa que cuando x "esta cerca", pero a la derecha de *n(*es decir valores de x mayores que *n*), entonces *f(x)* está cerca de k.

De modo análogo, es decir que $\lim\limits_{x \to n-} f(x) = k$ significa que cuando x "esta cerca", pero a la izquierda de *n(*es decir valores de x menores que *n*), entonces *f(x)* está cerca de k.

Ejemplo 5

Por esta razón, pese a que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe en el ejemplo 4, es correcto decir que:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 3 \qquad\qquad \lim_{x \to 2-} f(x) = 1$$

Y resulta, por lo tanto, bastante razonable enunciar la siguiente propiedad relativa a límites:

Existencia del límite:
$\lim\limits_{x \to n} f(x) = k$, si y solo si, existen $\lim\limits_{x \to n+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to n-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to n+} f(x) = \lim\limits_{x \to n-} f(x) = k$

LIMITES INFINITOS

Definición:
Todo límite en el que *f(x)* crece o decrece sin cota cuando *x* tiende a *n* se llama límite infinito

Ejemplo 6

Sea *f* la función dada por $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$. Podemos observar, con ayuda de la siguiente tabla, que *f(x)* decrece sin cota cuando *x* toma valores cercanos al 2 por la izquierda y que crece sin cota cuando *x* se acerca a 2 por la derecha.

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5
f(x)	-6	-30	-300	-3000	?	3000	300	30	6

f(x) decrece sin cota → ← *f(x) crece sin cota*

De lo que podemos afirmar que:
Para $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=+\infty$

Es importante aclarar que el símbolo en la expresión $\lim\limits_{x\to n} f(x)=\infty$ no significa que el límite exista. Bien al contrario, nos indica la razón de su no existencia: el comportamiento no acotado de *f(x)* cuando *x* tiende a *n.*
Pero como ya se ha mencionado antes, nos interesa el comportamiento de *f(x)* cuando *x* se acerca a determinado valor, no en el valor mismo.

Ejemplo 7

Determinar el límite, si existe, de *x* cuando tiende a 2, para $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$.

La tabla nos muestra el comportamiento de *f(x)* cuando *x* toma valores entre 1 y 3, esto nos da la idea de que se acerca a 400 por la izquierda y por la derecha.

x	1	1,2	1,5	1,8	1,9	2	2.1	2,2	2,5	3
f(x)	3	5	14	95	390	?	410	105	18	5

No obstante, observamos esta otra, que nos muestra el comportamiento de *f(x)* cuando *x* toma valores entre 1,9 y 2,1.

x	1,9	1,95	1,96	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,04	2,05	2,1
f(x)	390	1580	2475	9950	39900	?	40100	10050	2525	1620	410

Podemos deducir que si tomamos valores para x entre 1,99 y 2,01, el comportamiento de *f(x)* será en de seguir creciendo. Como crece con valores por la izquierda y la derecha de 2 podemos afirmar que: $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-2)^2}\to +\infty$

CALCULO DE LÍMITES

El método que utilizaremos para determinar el límite de una función será el que llamaremos sustitución Directa. Consiste en evaluar la función en el valor al que tiende *x.*

Con este método nos encontraremos con tres posibles casos:

Caso 1. Si la función no se indefine, la imagen será el limité.

Ejemplo 6

Sea $f(x)=3x^2+2x-3$, determinar $\lim_{x\to 4} f(x)$.

En este caso, sustituimos el valor de x por 4, por lo que

$f(4)=3\cdot 4^2+2\cdot 4-3=53$, por lo tanto podemos afirmar que $\lim_{x\to 4}(3x^2+2x-3)=53$

Caso 2. Si se indefine, de la forma $\frac{0}{0}$, redefiniremos el criterio de la función apropiadamente, para obtener un criterio definido.

Ejemplo 7

Sea $g(x)=\frac{6x^3+10x}{2x}$, determinar $\lim_{x\to 0} g(x)$.

En este caso, al evaluar *g(x)* para *x =0,* esta se indefine:

$$g(0)=\frac{6\cdot 0^3+10\cdot 0}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

Por lo que redefinimos el criterio de la siguiente forma:

$g(x)=\frac{6x^3+10x}{2x}=\frac{2x(3x^2+5)}{2x}=3x^2+5$, y para *x=0* , $3x^2+5=5$, por lo tanto $\lim_{x\to 0}\frac{6x^3+10x}{2x}=5$

Caso 3. Si se indefine, de la forma $\frac{a}{0}$, con $a\in\mathbb{R}$, en este caso construiremos una tabla con valores para x muy cercanos al limite, para determinar sus limites unilaterales.

Ejemplo 8

Sea $g(x)=\frac{-3}{(x+2)^2}$, determinar $\lim_{x\to -2} g(x)$. Al evaluar la función en -2, obtiene $\frac{-3}{0}$ por lo que construimos una tabla con valores para x entre -2,1 y -1,9.

x	-2,1	-2,05	-2,04	-2,03	-2,02	-2,01	2	-1,99	-1,98	-1,97	-1,96	-1,95	-1,9
f(x)	-300	-1200	-1875	-3333	-7500	-30000	?	-30000	-7500	-3333	-1875	-1200	-300

Podemos Firmar según la tabla que el comportamiento de *f(x)* cuando *x* se acerca a 2 por la derecha y por la izquierda es el decrecer sin cota.

Por lo tanto para $g(x)=\dfrac{-3}{(x+2)^2}$ $\quad \lim\limits_{x\to -2} g(x)\to -\infty$

DEFINICION CONTINUIDAD

Continuidad en un punto:

Decimos que una función f es **continua en c** si satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. *f(c)* está definida
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

Si una función *f* está definida en *I* (salvo, posiblemente, en c) y no es continua en c, se dice que tiene discontinuidad. Las discontinuidades se distribuyen en dos categorías: evitables e inevitables. Una discontinua en *c* se denomina evitable si *f* se puede hacer continua definiendo(o redefiniendo) apropiadamente *f(c).*

<u>Ejemplo 9</u>

Discutir la continuidad de cada función

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ b) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ c) $h(x)=\begin{cases} x+1, \text{ si } x\le 0 \\ x^2+1, \text{ si } x \rangle\ 0 \end{cases}$

a) El dominio de *f* lo constituyen todos los números reales no nulos. En *x=0, f* tiene una discontinuidad inevitable, no hay modo de redefinir *f(0)* para hacer que la nueva función sea continua en *x=0.*

b) El dominio de *g,* lo constituyen todos los valores reales excepto *x= 1.* La función presenta una discontinuidad evitable. Si se define *g(1)* como 2, la nueva función es continua en todos los números reales.

c) El dominio de esta función está formado por todos los números reales. Puesto que $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=1$, y $h(0)=1$.

Ejercicio #1

A. En los siguientes ejercicios encuentre el límite indicado, si existe, haciendo uso de la noción intuitiva de límite. (Mediante tablas)

1. $\lim_{x\to 3}(2x-8)$

2. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+3x}{x+3}$

3. $\lim_{x\to 3} g(x)$, si $g(x)=\begin{cases} x^2+3, & \text{si } x\geq 0 \\ 2x-3, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x+3}$

5. $\lim_{x\to -3} 3x$

6. $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si } x > 3 \\ x-1, & \text{si } x < 3 \end{cases}$

B. Hallar el límite mediante el método de sustitución directa

7) $\lim_{x\to 4} x^2$

8) $\lim_{x\to -3}(3x+2)$

9) $\lim_{x\to 0}(2x-1)$

10) $\lim_{x\to 3}(-x^2+1)$

11) $\lim_{x\to 2}(-x^2+x-2)$

12) $\lim_{x\to 3}(3x^3-2x^2+4)$

13) $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}$

14) $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{x+4}$

15) $\lim_{x\to 3}\frac{2}{x+2}$

16) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

17) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$

18) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

19) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}$

20) $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}$

21) $\lim_{x\to 3}\frac{4x^2-36}{2x-6}$

22) $\lim_{x\to 7}\frac{x+2}{(7-x)^2}$

23) $\lim_{x\to -4}\frac{-5}{(x+4)^2}$

24) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(2x-6)^2}$

C. Hallar los valores de *x*, (si existe alguno) en los que *f* es descontinúa. ¿Cuáles son descontinúas evitables? Hallar el límite del punto de la descontinúas evitables.

25) $f(x)=x^2-2x+1$

26) $f(x)=\frac{6x-2}{x^2-6x}$

27) $f(x)=\frac{16x^2-49}{4x+7}$

28) $f(x)=\frac{1}{x+1}$

29) $f(x)=\frac{6x^2-12x}{6x}$

30) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

31) $f(x)=\frac{4x^2-12x+9}{2x-3}$

32) $f(x)=x+senx$

33) $f(x)=\frac{100}{6+2x}$

<u>D. Resuelva</u>

34) Si $f(x)=\begin{cases} x-3, & \text{si } x > 5 \\ 3-x, & \text{si } x < 5 \end{cases}$ Hallar a) $\lim_{x\to 5-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -1+} f(x)$ c) $\lim_{x\to 7-} f(x)$

35. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x\neq -1 \\ 3 & \text{si } x=-1 \end{cases}$ Hallar a) $\lim_{x\to 2-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -1+} f(x)$ c) $\lim_{x\to -1+} f(x)$

E. Demuestre que:

36) $f(x)=\dfrac{16x^2-49}{4x+7}$, es continua para x=3.

37) $h(x)=\begin{cases} x+1, \text{ si } x \leq 0 \\ x^2+1, \text{ si } x \rangle\ 0 \end{cases}$, es continua para x=2

38) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe a para $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$

39) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe para $g(x)=\dfrac{6x^3+10x}{2x}$

40) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe para $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Bibliografía

Cálculo, Larson Hostetler Edwards 1999
Calculo Diferencial e Integral, Granville Smith Longley 1970
Calculo Aplicado, Alan M. Baum 1992
Introducción al Calculo, Fabio González 2001