Resumen de Límites

CASO 1: sustitución directa

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Se sustituye la variable independiente por el valor a *que tiende la x*.

Ejemplo 1.

Hallar el límite del polinomio,

$$\lim_{x \to 2} 5x + 3 =$$

Solución.

$$\lim_{x \to 2} 5x + 3 = 5 \cdot 2 + 3 = 13$$

Ejemplo 2.

Hallar el límite trigonométrico

$$\lim_{x \to \pi} (sen\ \theta + cos\ \theta) =$$

Solución.

$$\lim_{x \to \pi} (sen\ \theta + cos\ \theta) = sen\ \pi + cos\ \pi = 0 + (-1) = -1$$

CASO 2: indefinición $\frac{0}{0}$: factorización y cancelación

Ejemplo 3.

Hallar el límite de la función racional,

$$\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7} =$$

Solución.

$$\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7} = \frac{7^2 - 49}{7 - 7} = \frac{0}{0}$$

por tanto se debe factorizar, cancelar y posteriormente sustituir en el polinomio que queda;

$$\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7} = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(x+7)}{(x-7)} = \lim_{x \to 7} (x + 7) = 7 + 7 = 14$$

CASO 3: indefinición $\frac{0}{0}$: racionalización y cancelación

Ejemplo 4.
Hallar el límite de la función racional;

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} =$$

Solución.

Al hacer la sustitución directa tenemos,

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{9-9}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{0}$$

por tanto se debe racionalizar, cancelar y después sustituir directamente el polinomio restante,

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)} = \lim_{x \to 9} \sqrt{x}+3 = \sqrt{9}+3 = 6$$

Recordar que al racionalizar tanto el numerador como el denominador se multiplica por un 1 conveniente. En cada caso se usa el conjugado de la expresión radical, conjugado que se diferencia en + o -, de la expresión radical original.

CASO 4: indefinición $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$: límites infinitos, límites unilaterales

Ejemplo 5.
Hallar el límite,

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x-3} =$$

Solución.
Al sustituir directamente tenemos,

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x-3} = \frac{2 \cdot 3}{3-3} = \frac{6}{0}$$

Debemos recurrir al estudio de esta función aproximándose tanto por la derecha al 3 como por la izquierda. Es decir, límites unilaterales. Desde ahora la expresión 3^-, significará que tomarenos valores cercanos a 3 por la izquierda en forma ordenada ascendente. La expresión 3^+, significará que tomamos valores cercanos a 3 por la derecha es forma ordenada descendente. No debe confundirse con los signos negativos y positivos de los números, lo mismo que con las operaciones de suma y resta.

Lo más práctico es hacer una tabla de valores para identificar la tendencia de la función.

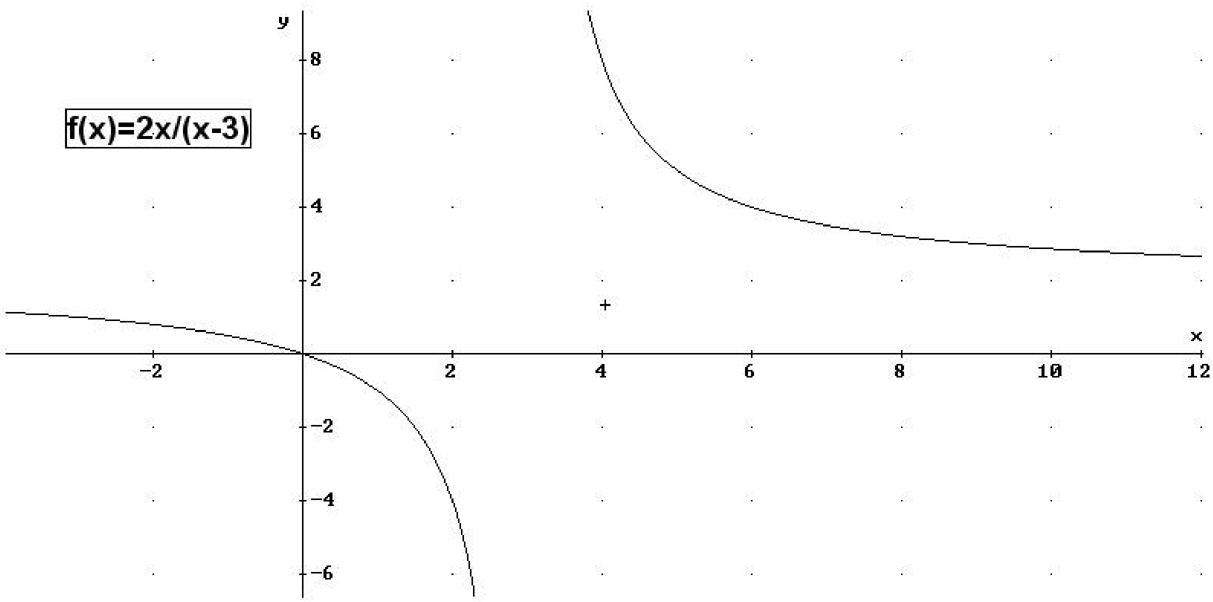
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} =$$

$x \to 3^-$	$\frac{2x}{x-3}$
1	-1
2	-4
2.5	-10
2.7	-18
2.8	-28
2.9	-58
2.99	-598
2.999	-5998
$\downarrow$ 3^-	$\downarrow$ $-\infty$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} =$$

$x \to 3^+$	$\frac{2x}{x-3}$
5	5
4	8
3.5	14
3.3	22
3.2	32
3.1	62
3.01	602
3.001	6002
$\downarrow$ 3^+	$\downarrow$ $+\infty$

Como vemos los dos límites son distintos y la gráfica así lo indica.



De aquí concluimos que,

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x-3} \quad NO \quad EXISTE$$

CASO 5: límites al infinito

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} k = k$$

$$\lim_{x\to c} k = k$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_mx^{m-n}}{b_n},\quad con\ \ m>n$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m}{b_nx^{n-m}},\quad con\ \ n>m$$

Ejemplo 6.
Hallar el límite al infinito,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3-5x^2+1}{2x^3+4x-7}=$$

Solución.
Aplicando una de las propiedades

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3-5x^2+1}{2x^3+4x-7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2}=3$$

Ejemplo 7.
Encuentre el límite siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+8x^3+6x-2}{7x^3-4x+9}=$$

Solución.
Aplicando una de las propiedades

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+8x^3+6x-2}{7x^3-4x+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{7}=+\infty$$

Ejemplo 8.
Encontrar el límite,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^2-x-12}{2x^5+6x^4-x^2-3}=$$

Solución.
Aplicando una de las propiedades

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^2-x-12}{2x^5+6x^4-x^2-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{2x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^3}=0$$

CASO 6: formas con infinitos usadas frecuentemente

$$\lim_{x\to 0} \frac{k}{x} = \frac{k}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} k \cdot x = k \cdot \pm\infty = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{k} = \frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{k}{x} = \frac{k}{\pm\infty} = 0$$

CASO 7: formas indeterminadas

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \quad 0 \cdot \pm\infty; \quad +\infty - +\infty; \quad 0^0; \quad (\pm\infty)^0; \quad 1^{\pm\infty}$$

Bibliografía

Granville, William y otros. Cálculo Diferencial e Integral.

Larson, Roland y otros. Cálculo I.

Valverde Fallas, Luis. Elementos de Cálculo con Aplicaciones.