

Cálculo: La Derivación Implícita

Funciones Explícitas y Funciones Implícitas

En los cursos de cálculo y secundaria la mayor parte de las funciones con que trabajamos están expresadas en forma **explícita**, como en la ecuación

$$y = 4x^2 + 3$$

dónde la variable **y** está escrita explícitamente como función de **x**. Sin embargo, muchas funciones están implícitas en una ecuación. La función $y = \frac{1}{x}$, viene definida **implícitamente** por la ecuación

$$x \cdot y = 1$$

Si queremos hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ para esta última ecuación lo hacemos despejando **y**, así: $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, obteniendo su derivada fácilmente:

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

El método sirve siempre y cuando seamos capaces de despejar **y** en la ecuación. El problema es que sino se logra despejar la variable **y** es inútil este método. Por ejemplo, ¿cómo hallar $\frac{dy}{dx}$ para la ecuación: $x^2 - 2y^3 + 4y = 2$? Resulta muy difícil despejar **y** como función explícita de **x**.

El Método de Regla de la Cadena para Funciones Implícitas

Ya sabemos que cuando se derivan términos que solo contienen a **x**, la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando tengamos que derivar un término donde aparezca la **y**, será necesario aplicar la regla de la cadena.

Ejemplo 1

La función implícita $y = x^3$ al derivarla se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Aquí las variables coinciden y se deriva normalmente.

Ejemplo 2

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

Aquí las variables no coinciden y se usa regla de la cadena.

Ejemplo 3

Hallar $\frac{dy}{dx}$, de la función implícita: $ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$

Solución:

Aplicando la notación $\frac{d}{dx}$, a cada término y extrayendo las constantes;

$$a \frac{d}{dx}(x^6) + 2 \frac{d}{dx}(x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(10)$$

A continuación, en el primer término las variables coinciden, se deriva normalmente; en el segundo término se aplica la derivada de un producto (primer paréntesis cuadrado); lo mismo en el tercer término.

$$6ax^5 + 2\left[\frac{d}{dx}(x^3)y + x^3\frac{dy}{dx}\right] - \left[\frac{d}{dx}(y^7)x + \frac{d}{dx}(x)y^7\right] = \frac{d}{dx}(10)$$

La regla de la cadena se aplica al término $\frac{d}{dx}(y^7)$, como puede observarse a continuación claramente en el segundo paréntesis.

$$6ax^5 + 2\left[3x^2y + x^3\frac{dy}{dx}\right] - \left[7y^6\frac{dy}{dx}x + y^7\right] = 0$$

quitando paréntesis y ordenando los términos,

$$6ax^5 + 6x^2y + 2x^3\frac{dy}{dx} - 7xy^6\frac{dy}{dx} - y^7 = 0$$

pasando términos al lado derecho,

$$2x^3\frac{dy}{dx} - 7xy^6\frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y$$

extrayendo factor común, $\frac{dy}{dx}$

$$(2x^3 - 7xy^6) \frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y$$

y finalmente despejando, obtenemos la respuesta requerida:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}$$

$\frac{dy}{dx}$ con Derivadas Parciales

El método de la regla de la cadena es lo más usual para derivar implícitamente en los cursos de cálculo, ya que a estas alturas solo se conoce la derivación común. Las derivadas parciales son un tema que aparece más adelante en los cursos de cálculo. Empero, si quisieramos hacer la vida más fácil a nuestros estudiantes podríamos traer estos contenidos y unirlos a la derivación implícita de una vez. Veamos la propuesta.

Obviamente tendríamos que enseñar la derivación parcial para funciones de 2 variables. Daremos un ejemplo con la siguiente función:

$$f(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4$$

La derivada parcial con respecto a la variable \mathbf{x} se denota $\frac{\partial f}{\partial x}$, se debe entender que la función será derivada considerando a \mathbf{x} como variable; tanto las \mathbf{y} como los números son constantes. Derivemos,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$$

Ahora derivemos parcialmente con respecto a la variable \mathbf{y} . Dejamos la \mathbf{x} y los números como constantes. quedando esta derivada como,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 2y - 5$$

Otro ejemplo con una función un poco más compleja: $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 = 38$.

Acomodemos la función y pongámosle nombre: $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 38$.

Derivando parcialmente con respecto a la variable x , tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy + 3y^2$$

Derivando parcialmente con respecto a la variable y , tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 6xy$$

En este punto ya tenemos las herramientas para hallar la derivada implícita usando las derivadas parciales. Para tal efecto usaremos la fórmula siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

donde $\frac{dy}{dx}$ es la derivada implícita que nos piden encontrar, y donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ representa la derivada parcial de la función f , con respecto a x ; $\frac{\partial f}{\partial y}$ representa la derivada parcial de la función f , respecto a la variable y .

Ejemplo 4

Hallar $\frac{dy}{dx}$, de la función implícita: $ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$

Solución:

Primero, $\frac{\partial f}{\partial x} = 6ax^5 + 6x^2y - y^7$, segundo $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 - 7xy^6$.

Ahora el cociente;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{6ax^5 + 6x^2y - y^7}{2x^3 - 7xy^6}$$

acomodando el signo, obtenemos el resultado pedido:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}$$

Ejemplo 5

Hallar la derivación implícita de la función: $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y, \text{ además } \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x.$$

Formando el cociente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x}$$

Así, el resultado obtenido es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x}.$$

Bibliografía

Granville, Willian y otros. Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Uteha.

Larson, Roland y otros. Cálculo. Volumen 1. Editorial Mc Graw-Hill, Sexta Edición.