DERIVADA

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE:

La definición fundamental del cálculo diferencial es la siguiente: *La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es *derivable* o que tiene *derivada.*

Puesto que en general, la derivada de una función de *x* es también es función de *x*, se emplea el símbolo $f'(x)$ para representar la derivada de $f(x)$.

El símbolo $\frac{d}{dx}$ considerado por si mismo, se llama *operador diferencial*; indica que toda función que se escriba después de él ha de derivarse con respecto a x.

Así: $\frac{d}{dx} f(x)$ indica la derivada de *f(x)* con respecto a *x*.

<u>Ejemplo1:</u>

Hallar la derivada de $f(x) = 2x^2 + 3x$

Solución:
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - (2x^2+3x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\left[x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2\right] + 3x + 3\Delta x - 2x^2 - 3x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2x^2 - 3x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left[4x + 2(\Delta x) + 3\right]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[4x + 2(\Delta x) + 3\right] \\
&= 4x + 3
\end{aligned}$$

De la teoría de límites se deduce que si existe la derivada de una función para cierto valor de la variable independiente, la función misma debe ser continua para aquel valor de la variable.
Sin embargo, la recíproca no es siempre cierta; se han descubierto funciones que son continuas y, que a pesar de eso, no tienen derivada. Para este curso se considerarán solamente las funciones derivables.

La regla general para la derivación se deduce directamente de la definición de derivada. Sin embargo el procedimiento de aplicar la regla en la resolución de problemas es lago o difícil; por consiguiente, se han deducido de la regla general reglas especificas para derivar ciertas formas normales que se presentan con frecuencia, y que usaremos en este curso a fin de facilitar la tarea.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Regla para la función constante:

Si *f(x)=c*, donde c es una constante, entonces $f'(x)=0$

Ejemplo 2:

$$\frac{d}{dx}(5)=0$$

Regla para potencias:

Si $f(x)=x^n$, donde *n* es un entero y $n\geq 1$, entonces $f'(x)=nx^{n-1}$

Ejemplo 3:

$$\frac{d}{dx}(x^{17})=17x^{16} \qquad \frac{d}{dx}(x)=1\cdot x^0=1$$

Reglas de la multiplicación de una constante:

Si $f(x)=cg(x)$, entonces $f'(x)=c\cdot[g'(x)]$

Ejemplo 4:

$$\frac{d}{dx}(4x^3)=4\cdot\frac{d}{dx}(x^3)=4\cdot(3x^2)=12x^2$$

Reglas de la suma:

Si $\frac{d}{dx}[g(x)+h(x)]$, entonces $g'(x)+h'(x)$

Ejemplo 5:

$$\frac{d}{dx}(x^3+2x)=\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(2x)=3x^2+2$$

Regla del producto:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]=f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$$

Ejemplo 6:

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\cdot y^5\right]=x^2\cdot\frac{d}{dx}(y^5)+\frac{d}{dx}(x^2)\cdot y^5=x^2\cdot 5y^4+2x\cdot y^5=5x^2y^4+2xy^5$$

Regla del Cociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\cdot f'(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2} \qquad g(x)\neq 0$$

Ejemplo 6:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{y^5}\right]=\frac{y^5\cdot\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(y^5)\cdot x^3}{\left[y^5\right]^2}=\frac{y^5\cdot 3x^2+5y^4\cdot x^3}{y^{10}}=\frac{3x^2y^5+5x^3y^4}{y^{10}}=\frac{y^4(3x^2y+5x^3)}{y^{10}}=\frac{3x^2y+5x^3}{y^4}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[sex(x)]=\cos(x) \qquad \frac{d}{dx}[\cos(x)]=-sen(x) \qquad \frac{d}{dx}[\tan(x)]=\sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\csc(x)]=-\csc(x)\cdot\cot(x) \qquad \frac{d}{dx}[\sec(x)]=\sec(x)\cdot\tan(x) \qquad \frac{d}{dx}[\cot(x)]=-\csc^2(x)$$

Ejercicio 1

A. Hallar:

1. $\frac{d}{dx}(3x^2+2x-5)$
2. $\frac{d}{dx}(5x-9)$
3. $\frac{d}{dx}(2x^3+3x^2-7x)$
4. $\frac{d}{dx}\left[(x+3)(x+2)\right]$
5. $\frac{d}{dx}\left[2x^3(2x+7)\right]$
6. $\frac{d}{dx}\left[x^2\cdot sen(x)\right]$
7. $\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-1}{x^2+7}\right]$
8. $\frac{d}{dx}\left[\frac{5x^3}{3x^2-2}\right]$
9. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x+1}{x-1}\right]$
10. $\frac{d}{dx}\left[5sen(x)+3\cos(x)\right]$
11. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x\cdot sen(x)}\right]$
12. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3x+1}{x}\right)$
13. $\frac{d}{dx}\left[3\cdot\tan(x)\right]$
14. $\frac{d}{dx}\left[\frac{\tan(x)}{\sec(x)}\right]$
15. $\frac{d}{dx}\left[2\cdot sen(x)\right]$
16. $\frac{d}{dm}\left(m^2\cdot sen(m)\right)$
17. $\frac{d}{dm}\left(\frac{\cos(m)}{m}\right)$
18. $\frac{d}{dh}\left(\frac{sen(h)}{h}\right)$
19. $\frac{d}{dm}\left(x^5-2x^3\right)$
20. $\frac{d}{dx}\left[x^2\cdot(x-3)\right]$
21. $\frac{d}{dx}\left(\frac{-3}{5}x^5\right)$

B. Completar la tabla sin usar la regla del cociente

Función	Reescribir	Derivar	Simplificar
22. $f(x)=\frac{4x-3x^3}{x}$			
23. $f(x)=\frac{4x^2-8x^3}{2x^2}$			
24. $f(x)=\frac{x^4-36}{x^2-6}$			
25. $f(x)=\frac{7}{3x^3}$			
26. $f(x)=\frac{4}{5x^2}$			
27. $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$			
28. $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x+2}$			

C. Para cada función hallar $f'(x)$ y $f'(a)$

Función	Valor de *a*
29. $f(x) = x^2 - 4x + 4$	*a = 3*
30. $f(x) = \frac{1}{3}\left(2x^3 - 4\right)$	*a = 2*
31. $f(x) = \left[\left(x+4\right)\left(x-5\right)\right]$	*a = -3*
32. $f(x) = \left(\frac{2x+3}{4-x}\right)$	*a = 2*

D. Hallar la derivada de la función mediante la definición de límite

33. $f(x) = 3x - 7$

34. $f(x) = x^2 - 6x$

35. $f(x) = 2x^2 + 7x + 6$

Regla de la cadena

Si *f* y *g* son funciones derivables, entonces $h(x) = f\left(g(x)\right)$ es una función es una función diferenciable y de hecho:

$$h'(x) = \frac{d}{dx} f\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Ejemplo 8:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(3x^2+2x\right)^{12}\right] = \frac{d}{dx}\left[\left(3x^2+2x\right)^{12}\right] \cdot \frac{d}{dx}\left(3x^2+2x\right)$$

$$= 12(3x^2+2x)^{11} \cdot (6x+2)$$

Ejemplo 9:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2+2x}\right] = \frac{d}{dx}\left[\left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{d}{dx}\left[\left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \frac{d}{dx}\left[x^2+2x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(2x+2\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot \left(2x+2\right)$$

$$= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$$

Ejercicio 2

Derivar las funciones dadas:

1. $p(s) = \left(s-1\right)^9$
2. $f(v) = \left(v^2+2v-1\right)^{-3}$
3. $g(t) = \dfrac{\left(t-2\right)^2}{\left(t+3\right)^6}$
4. $b(s) = \left(s^2+2\right)^{\frac{-1}{3}}$
5. $p(x) = (8x^3-7x^2+2x+1)^2$
6. $\left(x+1\right)^2\left(x-2\right)^3$

12. $\left(s^4-2s+1\right)^{-6}$

15. $s(y) = \sqrt{y^2+2y+2}$

19. $h(p) = \sqrt[4]{p+4}$

16. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

Bibliografía

Cálculo, Larson Hostetler Edwards 1999
Calculo Diferencial e Integral, Granville Smith Longley 1970
Calculo Aplicado, Alan M. Baum 1992
Introducción al Calculo, Fabio González 2001