

## SUCESIONES

### Definición

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y cuyo rango es un subconjunto de los números reales.

Si  $f$  es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo  $n$  le corresponde un número real  $f(n)$ . Estos números es el rango de  $f$ , generalmente se enumeran escribiendo

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

Al número  $f(1)$  se le llama primer término de la sucesión,  $f(2)$  es el segundo término de la sucesión y, en general  $f(n)$  es el  $n$ -ésimo término de la sucesión.

Se acostumbra a no usar la notación usual de función  $f(n)$  y se sustituye por la escritura

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

de modo que  $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$ .

### Definición

**Igualdad de dos Sucesiones** Una sucesión  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  es igual a a una sucesión  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  si y sólo si  $a_k = b_k$ , para todo entero positivo  $k$ .

A menudo se definen las sucesiones infinitas enunciando la fórmula del  $n$ -ésimo término. Así la sucesión conocida de los números positivos impares

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

cuyo término  $n$ -ésimo es  $f(n) = 2n - 1$ ; se tiene  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{20} = 39$  y  $a_{47} = 93$ , etc.

### Ejemplo 1

Hallar los primeros cuatro términos y el décimo de la sucesión  $a_n = 2n^2 - 4$ .

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(1)^2 - 4 = -2 \\ a_2 &= 2(2)^2 - 4 = 4 \\ a_3 &= 2(3)^2 - 4 = 14 \\ a_4 &= 2(4)^2 - 4 = 28 \end{aligned}$$

el décimo término sería:  $a_{10} = 2(10)^2 - 4 = 196$ .

### Nota 1

Si se conocen unos cuantos términos de una sucesión infinita, no queda determinada la fórmula que origina dichos números. Por ejemplo, si  $a_n = n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 23$ , provoca los números 1, 3, 5, 7 en los primeros cuatro términos como en la sucesión de los números positivos impares. Sin embargo,  $a_5 = 33$  y no como  $a_5 = 9$ , como supondríamos.

### Nota 2

No siempre hay una fórmula  $a_n$  que provoquen una sucesión explícita de números, como es el reconocido caso de los números primos.

**Definición**

**Sucesión Recurrente** Algunas secuencias infinitas se describen enunciando el primer término  $a_1$  junto con una regla que muestra como obtener cualquier término  $a_{k+1}$  a partir del término anterior  $a_k$ , siempre que  $k \geq 1$ . A una descripción de este tipo se le llama *definición recursiva o recurrente* y se dice que la sucesión está definida *recursivamente*.

**Ejemplo 2**

Hallar los cuatro primeros términos y el décimo término de la sucesión infinita que se define como,

$$a_1 = 3; \quad a_{k+1} = 2a_k \quad \text{con } k \geq 1$$

Solución: Aquí

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 3 = 6 \\ a_3 &= 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 6 = 12 \\ a_4 &= 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 12 = 24 \end{aligned}$$

para encontrar el décimo término, buscamos el patrón que generan esos números:  $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$

Así,  $a_{10} = 2^{10-1} \cdot 3 = 2^9 \cdot 3 = 1536$ .

## NOTACIÓN DE SUMATORIA

A menudo se requiere encontrar la suma de muchos términos de una sucesión infinita y para esto, se utiliza la letra griega mayúscula  $\Sigma$  (sigma) para indicarla.

Dada la sucesión  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  el símbolo  $\sum_{k=1}^m a_k$ , representa la suma de los primeros  $m$  términos.

Leyéndose así; la suma de los primeros términos  $a_1$  hasta el término  $a_m$ .

En notación matemática:  $\sum_{k=1}^m a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$ .

A la letra  $k$  se le llama índice de sumatoria, o variable de sumatoria y los valores 1 hasta el  $m$  indican los valores extremos de la citada variable de sumatoria.

**Ejemplo 3**

Evaluar

$$\sum_{k=1}^4 k^2(k-3)$$

Solución:

Para determinar la suma pedida, sustituimos sucesivamente la letra  $k$  por 1, 2, 3 y 4 y sumamos los términos resultantes. Así,

$$\sum_{k=1}^4 k^2(k-3) = 1^2(1-3) + 2^2(2-3) + 3^2(3-3) + 4^2(4-3) = 10$$

**Nota 3** La letra que designa la variable de sumatoria es arbitraria. Podemos perfectamente usar  $i, j, k$ , etc. como índice de la sumatoria. Esto es,

$$\sum_{j=1}^p a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$$

o también,

$$\sum_{i=1}^p a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$$

**Nota 4** No siempre el índice de la sumatoria comienza en 1, en algunas situaciones puede iniciar en 0, o en cualquier otro número entero positivo.

**Definición** **Sumas Parciales** Si  $n$  es un entero positivo la suma de los  $n$  primeros términos de una sucesión infinita se denota con  $S_n$ . Por ejemplo, dada  $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ ,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

y en general,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

al número  $S_n$  se le llama *enésima suma parcial* y a la sucesión infinita

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

se le llama *sucesión de sumas parciales*.

**Ejemplo 4** Encuéntrese los cuatro primeros términos y el  $n$ -ésimo término de la sucesión de sumas parciales asociadas a la sucesión:  $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$  de enteros positivos.

Solución:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + 2 = 3 \\ S_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\ S_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \end{aligned}$$

el término general de la suma de los primeros números positivos enteros, es la reconocida fórmula:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Ejemplo 5**

Evaluar

$$\sum_{k=0}^3 \frac{2^k}{k+1}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 \frac{2^k}{k+1} &= \frac{2^0}{0+1} + \frac{2^1}{1+1} + \frac{2^2}{2+1} + \frac{2^3}{3+1} \\ \sum_{k=0}^3 \frac{2^k}{k+1} &= 1 + 1 + \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

### Teoremas de las Sumatorias

Si  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  son sucesiones infinitas,  $C$  constante,  $1 < p < n$ , entonces para todo entero positivo  $n$ , se cumple:

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n C \cdot a_k = C \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)$$

$$\sum_{k=1}^n C = n \cdot C$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$$

## GRUPO de EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios, escribir los primeros cuatro términos de la sucesión para lo cual se da  $a_n$ ; hallar también el término indicado.

1.  $a_n = 2n + 4$ ;  $a_{80} =$

12.  $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ ;  $a_{14} =$

2.  $a_n = 5n - 3$ ;  $a_{76} =$

13.  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ ;  $a_{10} =$

3.  $a_n = \frac{1}{2n}$ ;  $a_{43} =$

14.  $a_n = 2 + (-0,1)^n$ ;  $a_{12} =$

4.  $a_n = \frac{1}{3n+1}$ ;  $a_{38} =$

15.  $a_n = 4 + (0,1)^n$ ;  $a_{13} =$

5.  $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ ;  $a_{123} =$

16.  $a_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{n+7}{2n}\right)$ ;  $a_{25} =$

6.  $a_n = \frac{3n}{2n+3}$ ;  $a_{96} =$

17.  $a_n = (-1)^n \left(\frac{6-2n}{\sqrt{n+1}}\right)$ ;  $a_{10} =$

7.  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ;  $a_{71} =$

18.  $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$ ;  $a_{12} =$

8.  $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ ;  $a_{48} =$

19.  $a_n = (-1)^{n+1}$ ;  $a_{36} =$

9.  $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)$ ;  $a_{13} =$

20.  $a_n = 14 \cdot (-1)^{n+1}$ ;  $a_{36} =$

10.  $a_n = \frac{1}{2^n}$ ;  $a_{11} =$

21.  $a_n = (-1)^{n+1} + (0,1)^{n-1}$ ;  $a_{17} =$

11.  $a_n = \frac{2^n}{3^n-1}$ ;  $a_7 =$

22.  $a_n = \sqrt{2}$ ;  $a_5 =$

Encuentre los primeros 5 términos de las sucesiones que se definen en forma recursiva.

1.  $a_1 = 2$  y  $a_{k+1} = 3a_k - 5$

6.  $a_1 = 2$  y  $a_{k+1} = k(a_k)$

2.  $a_1 = 5$  y  $a_{k+1} = 7 - 2a_k$

7.  $a_1 = 2$  y  $a_{k+1} = (a_k)^{k+1}$

3.  $a_1 = -3$  y  $a_{k+1} = (a_k)^2$

8.  $a_1 = 3$  y  $a_{k+1} = \frac{1}{a_k a_k}$

4.  $a_1 = 128$  y  $a_{k+1} = \frac{a_k}{4}$

9.  $a_1 = 2$  y  $a_{k+1} = (a_k)^k$

5.  $a_1 = 5$  y  $a_{k+1} = -2a_k$

10.  $a_1 = 2$  y  $a_{k+1} = (a_k)^{\frac{1}{k}}$

Encuentre el número dado en cada uno de los ejercicios siguientes.

1.  $\sum_{k=1}^5 (2k - 7)$

7.  $\sum_{k=3}^6 \left(\frac{k-5}{k-1}\right)$

2.  $\sum_{k=1}^6 (10 - 3k)$

8.  $\sum_{k=1}^6 \left(\frac{3}{k+1}\right)$

3.  $\sum_{k=1}^4 (k^2 - 5)$

9.  $\sum_{k=1}^5 (-3)^{k-1}$

4.  $\sum_{k=1}^{10} [1 + (-1)^k]$

10.  $\sum_{k=0}^4 (3(2^k))$

5.  $\sum_{k=0}^5 [k(k-2)]$

11.  $\sum_{k=1}^{100} 100$

6.  $\sum_{k=0}^4 (k-1)(k-3)$

12.  $\sum_{k=0}^{1000} 5$

Exprese las sumas siguientes en términos de la notación de sumatoria.

1.  $1 + 5 + 9 + 13 + 17$

6.  $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$

2.  $2 + 5 + 8 + 11 + 14$

7.  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

3.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11}$

8.  $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}$

4.  $\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19}$

9.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$

5.  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$

10.  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99 \cdot 100}$

En cada una de las sucesiones siguientes, hallar un expresión para  $a_n$ .

1. 3, 5, 7, 9, ...

6.  $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

2. 2, 5, 8, 11, ...

7.  $\frac{2}{3 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 5}, \frac{4}{5 \cdot 6}, \frac{5}{6 \cdot 7}, \dots$

3.  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

8. 2, 4, 8, 16, ...

4.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{15}, \dots$

9.  $2, \frac{3}{1 \cdot 2}, \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots$

5.  $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$

10.  $\frac{1}{2}, \frac{1 \cdot 2}{5}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{8}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{11}, \dots$

### PROBLEMAS de APLICACIÓN

- El número de bacterias que hay en cierto cultivo se duplica cada día. Si el número inicial de bacterias es 500, ¿cuántas hay al cabo de un día ? ¿de dos días ? ¿ de tres días? Obtenga una fórmula para el número de bacterias después de  $n$  días.
- La **Sucesión de Bode**, definida por la ecuación  $a_1 = \frac{4}{10}$  y  $a_k = \frac{3 \cdot 2^{k-2} + 4}{10}$  para  $k \geq 2$ , puede emplearse para calcular las distancias de los planetas al Sol. El tercer término de la sucesión es  $a_3 = 1$  unidad astronómica (que equivale a 92 900 000 millas) y corresponde a la Tierra. Aproxime los primeros cinco términos de la sucesión (El quinto término corresponde al planetoide (o asteroide) Ceres).
- La famosa **Sucesión de Fibonacci** se define recursivamente mediante  $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$  con  $a_1 = a_2 = 1$ .
  - Encuentre los primeros diez términos de la sucesión.
  - Los términos de la sucesión  $r_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$  dan progresivamente mejores aproximaciones de  $r$ , la **razón de oro**. Aproxime los primeros diez términos de la sucesión.
- La Sucesión Logística Discreta es la sucesión definida recursivamente mediante

$$y_{k+1} = y_k + \frac{r}{K} y_k (K - y_k)$$

- Obtenga los términos de la sucesión si  $y_1 = K$ .
- Aproxime los diez primeros términos de la sucesión si  $y_1 = 400$ ,  $r = 2$  y  $K = 500$ . Describa el comportamiento de esta sucesión que predice el número  $y_k$  en la población después de  $k$  años.

# Bibliografía

- [1] Bardell, Roos H. Algebra Superior.
- [2] Swokowski, Earl W. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.