Sistemas de Ecuaciones Lineales Resueltas con Matrices

La notación matricial proporciona una manera concisa de escribir un sistema de *n ecuaciones lineales* con *n incognitas*. Veremos sólo el caso cuando *n* = 3, pero las formulaciones son válidas para cualquier valor de *n*.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales;

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Sea A la matriz de los coeficientes,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sean X y B los vectores columnas definidos por

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Empleando la multiplicación matricial, el anterior sistema de ecuaciones lineales puede entonces escribirse como

$$A \cdot X = B$$

Aquí A es una matriz de 3x3, X es una de 3x1 y el producto es una matriz de 3x1, los mismo que B. En el caso general A sería de n x n, X de n x 1, y B de n x 1.

Supongamos ahora que A es no singular. Entonces la inversa A^{-1} existe y podemos multiplicar ambos miembros de $A \cdot X = B$ por A^{-1} por la izquierda, para obtener

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \qquad (*)$$

Pero tenemos

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1}A) \cdot X = I \cdot X = X$$

por eso (*) se convierte en

$$X = A^{-1} \cdot B$$

y hemos expresado la solución X del sistema anterior como el producto de A^{-1} por B.

EJEMPLO

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando matrices:

$$\begin{aligned} 2x + y + 0z &= 1 \\ x - 2y + 4z &= -3 \\ 3x + y - 5z &= 2 \end{aligned}$$

Solución

Usando cualquier método para hallar la matriz inversa se encuentra que la matriz inversa de los coeficientes es

$$A^{-1} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 17 & -10 & -8 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces el sistema matricial siguiente;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 17 & -10 & -8 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 1 \\ 31 \\ -6 \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema es $x = -\frac{1}{29}$, $y = \frac{31}{29}$, y $z = -\frac{6}{29}$.

Ejercicios de Utilización de Matrices y su Inversa

1. Seis libras de té y cinco de café cuestan \$ 9,85. Siete libras de té y 8 de café cuestan \$ 13,55. Encontrar el precio por libra de cada uno.

   Solución:

   x; son las libras de té
   y; son las libras de café

   de esta forma

$$\begin{aligned} 6x + 5y &= 9,85 \\ 7x + 8y &= 13,55 \end{aligned}$$

   como matriz sería

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}85 \\ 13{,}55 \end{pmatrix}$$

   La inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad es \;\; la \;\; matriz \quad \begin{pmatrix} \frac{8}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{-7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{-7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9{,}85 \\ 13{,}55 \end{pmatrix}$$

   y se tiene como solución: x= 0,85 y y=0,95.

2. José tiene \$75 para comprar 160 tornillos. Un tipo de tornillo cuesta \$0,50 y el otro \$0,40. ¿ Cuántos tornillos de cada tipo puede comprar ?

   Solución:

   La matriz del problema planteado es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 160 \end{pmatrix}$$

despejando las incógnitas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 75 \\ 160 \end{pmatrix}$$

encontrando la inversa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 160 \end{pmatrix}$$

para una respuesta final de: $x = 110$ y $y = 0$.

3. Un granjero cría y vende pollos, patos y pavos. Durante un cierto mes, tiene 230 aves de las cuales 70 son pavos. Si gana \$1 por pollo, \$2 por patos y \$3 por pavos y sus entradas totales son \$400, ¿ cuantos pollos y patos debe tener ?

   Solución:

   Planteando el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 160 \end{pmatrix}$$

   $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190 \\ 160 \end{pmatrix}$$

   aqui: x es el número de pollos; y es el número de patos y z es el número de pavos.

   Además, $det\ A = -1$.

   La respuesta final es: x = 130 , y = 30 y z = 70.

4. Un grupo A y un grupo B pueden armar una máquina, si el grupo A trabaja 6 horas y el grupo B trabaja 12 horas; o pueden hacer el trabajo si el grupo A trabaja 9 horas y el grupo B trabaja 8 horas. ¿ Qué tiempo deberá trabajar cada grupo si solamente uno hace el trabajo ?

   Solución:

   A = 15 horas y B = 20 horas.

5. La compañía Ruiz invierte un total de \$30 000. Una parte al 6 % y el resto al 9 %. Los dividendos anuales de las dos inversiones son iguales a los que ganaría todo el dinero si estuviera invertido al 7 %. Encontrar la cantidad invertida a cada tasa.

   Solución:

   x + y = 30 000 $\longrightarrow$ x + y = 30 000

   0,06x + 0,09y = 0,07(30.000) $\longrightarrow$ 2x +3y =70 000

   Como sistema matricial

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \ \ y \ \ C = \begin{pmatrix} 30000 \\ 70000 \end{pmatrix}$$

   entonces, $A \cdot X = C \longrightarrow X = A^{-1} \cdot C$

   donde

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Asi, x=\$20 000 y, y=\$10 000.

6. Se estan vendiendo conos de helados a \$10, \$20 y \$30 (nada que ver los precios con la realidad). Amparo y Beatriz compran conos de \$20, mientras que Cecilia compra uno \$30 y Diana unos de \$10. Como los conos estan deliciosos. Amparo compro otro cono de \$30 mientras que las otras tres compran conos de \$10. Escribir una matriz A de 4x3 que represente a compradores y número de helados comprados; y una matriz de 3x1 que represente precios. Encontrar $A \cdot B$ y el gasto total en conos.

   Solución:

   La siguiente tabla resume todo lo anterior:

	Compras de Conos		
	\$10	\$20	\$30
Amparo	0	1	1
Beatriz	1	1	0
Cecilia	1	0	1
Diana	2	0	0

Entonces la matriz A es igual a,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\; y \;\; la \;\; matriz \;\; B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Entonces, $A \cdot B =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

entonces, el gasto total en conos es de $180.

7. Un fabricante de juguetes emplea tornillos, clavos, abrazaderas y grapas para ensamblar tres modelos de juguetes. La tabla siguiente muestra el número que se requiere para cada juguete.

	Juguete A	Juguete B	Juguete C
Números de Tornillos	6	3	4
Námeros de Clavos	5	4	3
Números de Grapas	2	1	5
Números de Abrazaderas	2	0	1

El esquema de producción del fabricante para los últimos meses del año es como sigue:

	Julio	Agosto	Setiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Juguete A	7	6	8	9	12	6
Juguete B	4	3	5	7	8	2
Juguete C	0	1	4	6	9	1

Determinar el inventario de partes que se necesita cada mes para ensamblar los juguetes.

<u>Solución:</u>

Multiplicando estas dos matrices

	Julio	Agosto	Setiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Números de Tornillos	54	49	79	99	136	46
Números de Clavos	51	45	72	91	119	41
Números de Grapas	18	20	41	55	77	19
Números de Abrazaderas	14	13	20	24	33	13

8. Tres lineas de ensamble: A, B y C trabajan durante 15, 22 y 23 horas respectivamente. Se ensamblan tres productos: L, M y N en estas lineas como sigue; una unidad de L está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas y en C durante 3 horas; una unidad de M está en A durante 2 horas, en B durante 2 horas y en C durante 3 horas; una unidad de N está en A durante 1 hora, en B durante 2 horas y en C durante 2 horas. Si las lineas se usan a máxima capacidad encontrar el número de unidades que es posible ensamblar en cada producto.

<u>Solución:</u>

El resumen de lo anterior sería:

$$L = \begin{cases} 1 \;\; hora \;\; en \;\; A \\ 2 \;\; horas \;\; en \;\; B \\ 1 \;\; hora \;\; en \;\; C \end{cases} \qquad M = \begin{cases} 2 \;\; horas \;\; en \;\; A \\ 2 \;\; horas \;\; en \;\; B \\ 3 \;\; horas \;\; en \;\; C \end{cases} \qquad N = \begin{cases} 1 \;\; hora \;\; en \;\; A \\ 2 \;\; horas \;\; en \;\; B \\ 2 \;\; horas \;\; en \;\; C \end{cases}$$

A trabaja 15 horas
B trabaja 22 horas
C trabaja 23 horas

La matriz es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La tabla que se forma con la matriz incluida es:

	L	M	N
A	1	2	1
B	2	2	2
C	1	3	2

y el determinante de esta matriz es -2 asi;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 22 \\ 23 \end{pmatrix}$$

...y finalmente,

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 15 \\ 22 \\ 23 \end{pmatrix}$$

La respuesta es: L = 3 , M = 4 y N = 4.

Bibliografía

[1] Ayres, Frank. Teoría y Problemas de Matrices. Serie Schaum, Editorial McGraw-Hill,Mexico. 1978.

[2] Britton, Jack. Matemáticas Universitarias. Tomo II. Editorial CECSA, Mexico, 1970.

[3] Howard, Taylor. Matemáticas Básicas; con Vectores y Matrices. Editorial Limusa, Mexico. 1980.

[4] Huang, David. Introducción al Uso de la Matemática en el Análisis Económico. Editorial Limusa. 1980.

[5] Kovacic, Michael. Matemática: aplicaciones a las Ciencias Económicas y Administrativas. Fondo Educativo Interamericano S.A., Mexico. 1977.

[6] Yamane, Taro. Matemática para Economistas. Editorial Ariel, Barcelona, España. 1965.