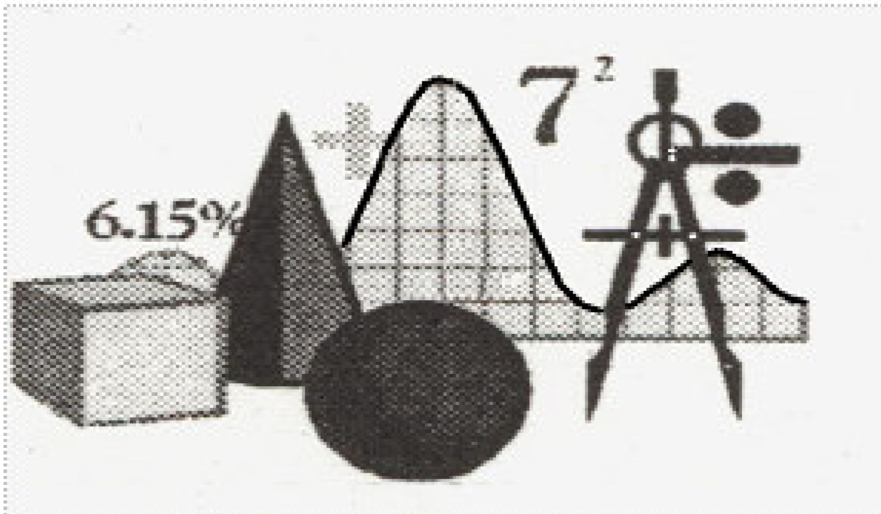


Sociedad Ramamsem

Problemas de Matemática para Competencias olímpicas

Elaborado por :

Miguel Arias Vílchez

Kendrick Mitchell Maturin

Jorge Obando Toruño

José Virgilio Reyes Pérez

Mauricio Rodríguez Mata

II TRIMESTRE DEL 2006

CONTENIDO

1. Presentación.

A partir de esta publicación, la *SOCIEDAD RAMAMSEM* cuenta con nuevos colaboradores, algunos de los cuales se harán cargo de la sección ***Lógica y Matemática Recreativa***.

En esta segunda publicación del año, a solicitud de varios lectores, se agrega una sección denominada ***Lógica y Matemática Recreativa*** que consiste en proponer 10 ejercicios sobre razonamiento o matemática recreativa. Esta sección estará a cargo de algunos de nuestros nuevos colaboradores.

Una nueva sección será creada a partir de la próxima publicación la cual consistirá en proponer diez problemas que nos remitan nuestros lectores. Si usted desea proponer algún ejercicio para la siguiente publicación tenga en cuenta que el mismo debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. Debe ser enviado a alguno de los correos electrónicos de la sociedad que se encuentran al final de esta presentación y antes del 30 del mes anterior.
2. Debe estar digitado en procesador WORD y en letra ARIAL número 12.
3. Debe venir el nombre completo del proponente y su lugar de trabajo o estudio.
4. Debe adjuntarse, al menos, una solución del mismo.

En caso de que un problema, enviado por algún lector, sea seleccionado se publicará el nombre de quien lo propone. Del mismo modo, cuando se reciban soluciones a un problema por parte de los lectores se seleccionará una de ellas, de acuerdo con los criterios que un comité de la *SOCIEDAD RAMAMSEM* empleará, para ser publicada respetando la correspondiente autoría además del nombre de los demás lectores que resolvieron el problema y la solución ofrecida por el proponente.

Por otro lado, a solicitud de algunos lectores, tanto los 30 problemas de la sección **Enunciado de los problemas propuestos** como los 10 problemas de la sección **Selección de problemas** tendrán escrito en que competencia fueron utilizados para que ello nos permita medir el nivel de dificultad de dichas competencias y el nivel que iremos adquiriendo.

Esta publicación es realizada por la Sociedad RAMAMSEM y va dirigida a todas aquellas personas que deseen explorar una matemática diferente a la que se enseña en secundaria, y algo más !

Toda comunicación o información con respecto a los problemas propuestos o soluciones, pueden ser enviados a ramamsem@latinmail.com o bien ramamsem@costarricense.cr

2. Enunciado de los problemas propuestos.

Miguel Ángel Arias Vílchez

Kendrick Mitchell Maturin

Mauricio Rodríguez Mata

1. Halle un número de dos dígitos tal que sea igual al doble producto de sus dígitos.
(NLTA Math League, U.S.A, 1998 – 99)

2. Si p y q son las raíces de $2x^2 - 5x + 1 = 0$, ¿cuál es el valor numérico de $\log_2 p + \log_2 q$?
(Concurso de problemas J.I.R M^c Knight, 1992)

3. Dado que $x^2 - x + 1 = 0$, determine el valor numérico de $x^9 - 3x^6 + 4x^3$.
(Concurso de problemas J.I.R M^c Knight, 1992)

4. Los lados de un triángulo miden 4, 13 y 15. Determine la medida del radio del círculo inscrito.
(Olimpiada Matemática de la Florida, competición por equipos, 1998)

5. Un triángulo rectángulo tiene un área de 5 y su hipotenusa tiene longitud 5. Determine la longitud de los catetos del triángulo.
(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, segunda parte de la ronda final, 1998)

6. Si P_1 y P_2 son primos impares distintos y $A = (P_1 P_2 + 1)^4 - 1$, pruebe que A tiene al menos cuatro divisores primos distintos.
(CEOC, Costa Rica, 1998)

7. Resolver la ecuación: $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = 14.$

(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998)

8. Hallar todos los valores de "a" tales que $x^3 - 6x^2 + 11x + a - 6 = 0$ tenga exactamente tres raíces enteras.

(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998)

9. Sean a y b números reales que satisfacen $a^2 + b^2 = 1$. Pruebe que

$$| a^2b + ab^2 | \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998)

10. Pruebe que todo número de la serie: 49, 4489, 444889, 44448889, … es un cuadrado perfecto.

NOTA: todo número de la serie está formada por n cuatros, n – 1 ochos y un nueve.

(Competición Matemática de la República de Eslovenia, 1998)

11. Determine el menor entero positivo cuyo primer dígito es 1 y satisface la siguiente propiedad: si este dígito es transferido al final del número original entonces el número formado es el triple del original.

(Olimpiada Colegial de Matemática de la Ciudad de San Petersburgo, 1986)

12. Pruebe que si un entero n es primo relativo con 10, la 101 potencia de n termina con los mismos tres últimos dígitos de n (por ejemplo, 1233^{101} termina en 233 y 37^{101} termina en 037).

(Olimpiada Colegial de Matemática de la Ciudad de San Petersburgo, 1986)

13. Sean x la longitud de un lado y y la longitud de una diagonal de un pentágono regular. Pruebe que: $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 1.$

(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998)

14. Considere todas las parejas de números reales que satisfacen las inecuaciones:

$$-1 \leq x + y \leq 1 \;\; ; \;\; -1 \leq xy + x + y \leq 1$$

Sea M el máximo valor posible de x, determine M.

(44 Olimpiada Matemática Lituana, 1998)

15. Pruebe que $2^n \bullet 3^{2n} - 1$ es siempre divisible por 17 para todo n natural.

(Concurso de problemas J.I.R M^c Knight, 1992)

16. Considere el sistema de ecuaciones

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_2 + x_3 = 4$$
$$x_3 + x_4 = 8$$
$$\vdots$$
$$x_{k-1} + x_k = 2^{k-1}$$
$$\vdots$$
$$x_{2000} + x_{2001} = 2^{2000}$$
$$x_{2001} + x_1 = 2^{2001}$$

Determine el valor de x_{2001} .

(Concurso de problemas J.I.R M^c Knight, 1992)

17. Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b. Una circunferencia de radio r es tangente a los dos catetos y tiene su centro sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. Demuestre que la suma de los recíprocos de a y b es igual al recíproco de r.
(6 Olimpiada Juvenil de Matemática, final nacional de 2° de diversificado, Venezuela, 1998)

18. Dentro de un sector circular, equivalente a un sexto de un círculo de radio r, se inscribe un círculo que es tangente a los dos radios y el arco del sector. Determine, en función de r, el radio del círculo inscrito.
(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, primera parte de la ronda final, 1998)

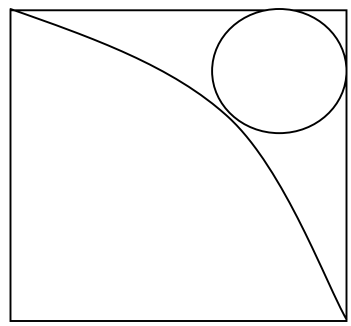
19. Para un entero positivo n, sea f(n) el residuo de $n^2 + 2$ cuando se divide por 4. Por ejemplo, f(3) = 3, f(4) = 2. Pruebe que la ecuación $x^2 + (-1)^4 f(z) = 10y$ no tiene soluciones enteras x, y, z.
(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998)

20. Hallar todas las funciones reales f definida en el conjunto de los números reales excepto cero tal que

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, x \neq 0$$

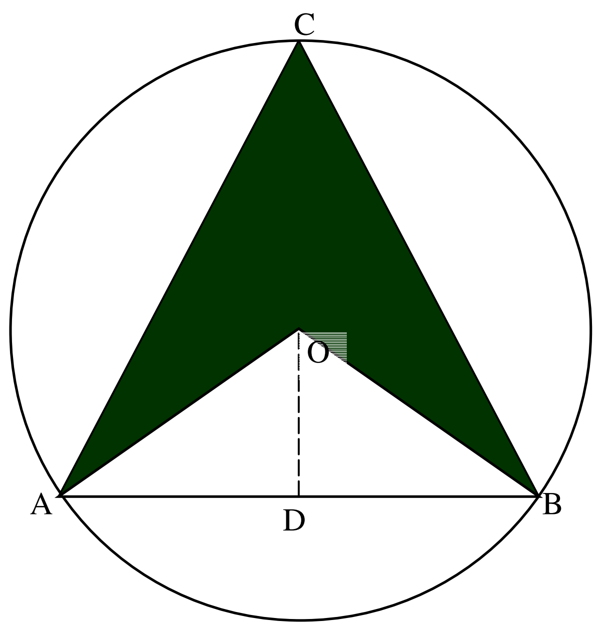
(8 Olimpiada Koreana de Matemática, 1998)

21. En la figura adjunta la cuarta parte de un círculo es inscrito en un cuadrado de lado 4. Hallar el radio del menor círculo que es tangente al cuarto del círculo y dos lados del cuadrado.



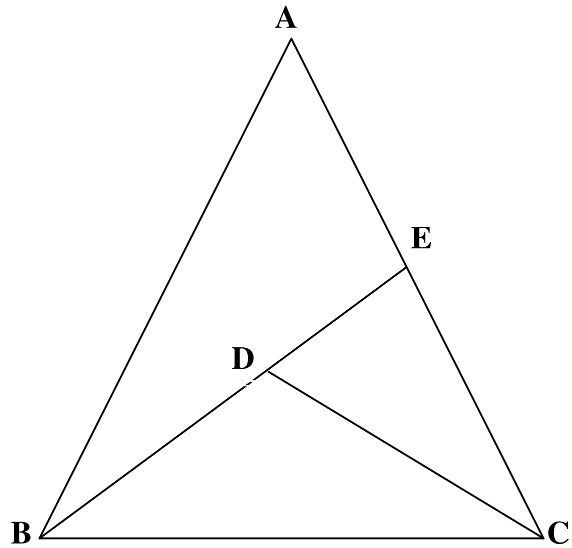
(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, primera parte de la ronda final, 1998)

22. En la figura adjunta, el radio del círculo es 1, el ángulo central AOB es recto y AC y BC son cuerdas de igual longitud. Determine el área sombreada.



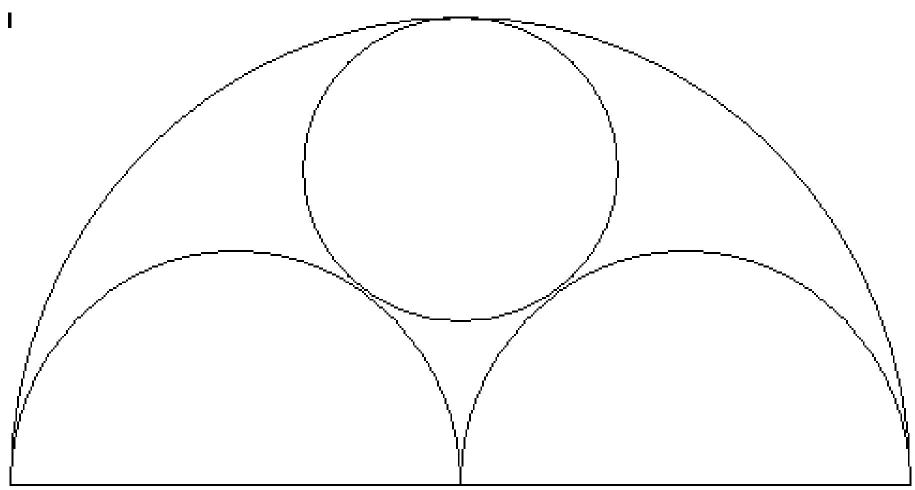
(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, primera parte de la ronda final, 1998)

23. En la figura adjunta, BD = 2, BC = 8 y $\angle$ ABC = $\angle$ BCA = $\angle$ CDE = $\angle$ DEC.
    Determine AB.



(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, segunda parte de la ronda final, 1998)

24. Dos semicírculos de radio 3 son inscritos en un semicírculo de radio 6. Un círculo es tangente a las tres semicircunferencias como se indica en la figura. Determine dicho radio.



(NLTA Math League, U.S.A, 1998 – 99)

25. Sean a, b, c y d enteros positivos tales que $a^5 = b^4$, $c^3 = d^2$ y $c - a = 19$. Determine $d - b$.
(Propuesto pero no usado en la III eliminatoria de OLCOMA, 1998)

26. Sea M un conjunto formado por 17 enteros positivos cuyos divisores primos son menores o iguales que 7. Probar que existen en M dos números cuyo producto es un cuadrado perfecto.
(Propuesto pero no usado en la III eliminatoria de OLCOMA, 1998)

27. Sea $f(x) = x^3 - (a + 2)x - 4a$, con $0 < a < 1$. Si f(x) interseca al eje X en x_0, pruebe que

$$a + 1 < x_0 < a + 2$$

(CEOC, 2000)

28. Las longitudes a, b, c de los lados de un triángulo satisfacen la igualdad

$$(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$$

Determine la medida del ángulo C, opuesto al lado de longitud c.
(Prueba por equipos, VII Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 1992)

29. Al sumar un número de dos dígitos con el número que resulta al invertir los dígitos del mismo se obtiene un cuadrado perfecto.

Determine todos los números que satisfagan la condición anterior.
(Olimpiada Colegial de Matemática de la Ciudad de San Petersburgo, 1986)

30. El entero A consiste de 666 dígitos iguales a 3, y el entero B tiene 666 dígitos iguales a 6.

Determine $A \cdot B$.
(Olimpiada Colegial de Matemática de la Ciudad de San Petersburgo, 1986)

3. Solución de los problemas propuestos.

Miguel Ángel Arias Vílchez
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

1. Halle un número de dos dígitos tal que sea igual al doble producto de sus dígitos.
(NLTA Math League, U.S.A, 1998 – 99)

SOLUCIÓN:

Sean a y b el dígito de las decenas y unidades, respectivamente, del número buscado entonces, de acuerdo con el enunciado, se tiene

$$10a + b = 2ab$$
$$\Rightarrow b = 2ab - 10a = 2a(b - 5)$$

con lo que b debe ser par y $b - 5 \geq 0 \Rightarrow b \geq 5$ de donde b podría ser 6 u 8.

Si b = 6 entonces a = 3 y el número buscado es 36.

Si b = 8 entonces $a = \frac{4}{3}$ lo cual no satisface las condiciones del enunciado.

Por tanto, el único número que satisface las condiciones del enunciado es 36.

2. Si p y q son las raíces de $2x^2 - 5x + 1 = 0$, ¿cuál es el valor numérico de $\log_2 p + \log_2 q$?
(Concurso de problemas J.I.R M[c] Knight, 1992)

SOLUCIÓN:

Como p y q son las raíces de $2x^2 - 5x + 1 = 0$ entonces $pq = \frac{1}{2} = 2^{-1}$.

De $\log_2 p + \log_2 q$ se obtiene $\log_2 pq = 2^{-1} = -1$. Entonces, el valor numérico de $\log_2 p + \log_2 q$ es -1.

NOTA: recordemos que si x_1 y x_2 son las raíces de $ax^2+bx+c=0$ entonces

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{c} \qquad \text{y} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

en efecto, sabemos que $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ de donde:

- $x_1 + x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = \dfrac{-b}{a}$

- $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Por otro lado, es importante que se tengan presenten las más importantes propiedades de los logaritmos, algunas de las cuales son

- Si $\log_a b = n$ entonces $a^n = b$.
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a b^n = n \log_a b$
- $\log_a a^n = n$
- $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a (x / y)$

3. Dado que $x^2 - x + 1 = 0$, determine el valor numérico de $x^9 - 3x^6 + 4x^3$.
(Concurso de problemas J.I.R M^c Knight, 1992)

SOLUCIÓN:

Como $x^2 - x + 1 = 0$ es claro que $x \neq -1$ por lo que, si multiplicamos a ambos lados de la ecuación por $x + 1$ ésta se mantiene, esto es

$$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$$
$$\Rightarrow x^3 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow x^3 = -1$$

luego, $x^9 - 3x^6 + 4x^3 = (x^3)^3 - 3(x^3)^2 + 4(x^3) = -1 - 3 - 4 = -8$

4. Los lados de un triángulo miden 4, 13 y 15. Determine la medida del radio del círculo inscrito.
(Olimpiada Matemática de la Florida, competición por equipos, 1998)

SOLUCIÓN:

Recordemos que el área de un triángulo cuando se conocen las medidas de sus tres lados puede ser calculada mediante la fórmula de Herón, esto es, si el ΔABC tiene medidas $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ entonces

$$(ABC) = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

en donde

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

también, si r es el inradio del triángulo citado,, y con la misma notación, entonces

$$(ABC) = S \cdot r$$

Luego, de acuerdo con los datos del enunciado, se tiene

$$\sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 16r$$

por lo que el radio del círculo inscrito mide $\frac{3}{2}$.

NOTAS:

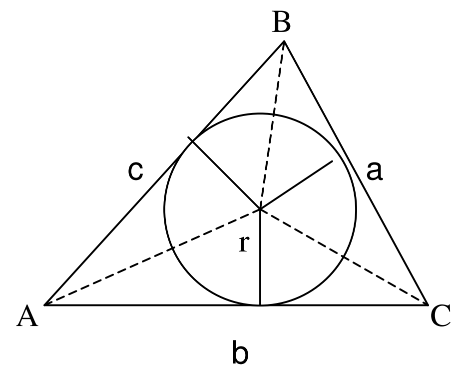
1. Si los vértices de un polígono están dados por A_1, A_2, …, A_n entonces la notación $(A_1A_2 \ldots A_n)$ denota el área de dicho polígono.

2. Consideremos la figura adjunta.

En donde O es el centro del círculo inscrito de radio r y el triángulo Δ ABC tiene lados de longitudes a, b, c. Es claro que (ABC) = (BOC) + (AOC) + (AOB)

$\Rightarrow$ (ABC) = ar / 2 + br / 2 + cr / 2

$\Rightarrow$ (ABC) = r (a + b + c) / 2 = S r



5. Un triángulo rectángulo tiene un área de 5 y su hipotenusa tiene longitud 5. Determine la longitud de los catetos del triángulo.

(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, segunda parte de la ronda final, 1998)

SOLUCIÓN:

Sean a y b las longitudes de los catetos entonces

$$\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ \dfrac{ab}{2}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2=25+2ab \\ ab=10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2=25+20 \\ ab=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{45}=3\sqrt{5} \\ ab=10 \end{cases} \qquad (1)$$

ahora bien, de acuerdo con las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática, debe existir una ecuación cuadrática cuyas raíces sean los catetos buscados. Por (1) se tiene que una ecuación que satisface las condiciones explicitadas corresponde a $x^2-3\sqrt{5}x+10=0$ cuyas soluciones son $2\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}.$ Así que los catetos del triángulo tienen por medidas $2\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}.$

NOTAS:

- Recordemos que si S denota la suma de las raíces de una ecuación cuadrática y P su producto entonces ésta se puede escribir como $x^2 - Sx + P = 0$. En efecto, si x_1 y x_2 son las raíces de $x^2 + mx + n = 0$ se tiene que

$$x^2 + mx + n = (x - x_1)(x - x_2)$$

efectuando las multiplicaciones en el miembro derecho y agrupando se tiene

$$x^2 + mx + n = x^2 - (x_1 + x^2)x + x_1x_2 = x^2 - Sx + P$$

- Unas identidades muy útiles son:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \qquad x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

6. Si P_1 y P_2 son primos impares distintos y $A = (P_1P_2 + 1)^4 - 1$, pruebe que A tiene al menos cuatro divisores primos distintos.
(CEOC, Costa Rica, 1998)

SOLUCIÓN:

Notemos que

$$A = (P_1P_2 + 1)^4 - 1 = \left(P_1^2P_2^2 + 2P_1P_2 + 1\right)^2 - 1$$

entonces se tiene que

$$A = \left[\left(P_1^2P_2^2 + 2P_1P_2 + 1\right) - 1\right]\left[\left(P_1^2P_2^2 + 2P_1P_2 + 1\right) + 1\right]$$

de donde

$$A = \left(P_1^2P_2^2 + 2P_1P_2\right)\left(P_1^2P_2^2 + 2P_1P_2 + 1 + 1\right) = P_1P_2(P_1P_2 + 2)[P_1P_2(P_1P_2 + 2) + 2]$$

Sea $P_3 = P_1P_2 + 2$ entonces

$$A = P_1P_2P_3(P_1P_2P_3 + 2)$$

Ahora, $P_3 \equiv 2(\bmod P_1)$, $P_3 \equiv 2(\bmod P_2)$. Lo anterior nos indica que P_1 y P_2 no dividen a P_3. Tenemos dos casos para analizar, si P_3 es compuesto entonces A tiene al menos cuatro divisores primos diferentes: P_1, P_2 y los que se obtengan de la factorización canónica de P_3. Si P_3 es primo, entonces sea $P_4 = P_1P_2P_3 + 2$ y un análisis similar al anterior nos lleva a la misma conclusión. Por tanto, A tiene al menos cuatro divisores primos distintos.

7. Resolver la ecuación: $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = 14.$

(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998)

SOLUCIÓN:

Como $7 \pm \sqrt{48} = 7 \pm 2\sqrt{12} = 7 \pm 2\left(\sqrt{4}\right)\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{4} \pm \sqrt{3}\right)^2 = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2$ la ecuación dada puede ser escrita como $\left(2-\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 14$ (1).

Notemos, por otro lado, que $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 1$ por lo que al multiplicar (1) por $\left(2+\sqrt{3}\right)^x$ se obtiene

$$1^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^{2x} = 14\left(2+\sqrt{3}\right)^x \Rightarrow \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^x\right]^2 - 14\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = \frac{14 \pm \sqrt{192}}{2} = \frac{14 \pm 8\sqrt{3}}{2} = 7 \pm 4\sqrt{3} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \\ x = -2 \end{cases}$$

por lo que, el conjunto solución es $\{-2, 2\}$

NOTA: toda expresión de la forma $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ puede ser expresada en la forma $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ con $m > n$, para ello procedemos así:

- buscamos dos números cuyo producto sea b.
- y que a la vez, la suma de esos números sea igual a a.

En nuestro caso, $\sqrt{7 \pm \sqrt{48}} = \sqrt{7 \pm 2\sqrt{12}}$ con lo que

m	n	a = m + n = 7	b = m · n = 12	Deben cumplirse las dos condiciones
12	1	$12 + 1 \neq 7$	$12 \cdot 1 = 12$	No se cumplen
6	2	$6 + 2 \neq 7$	$6 \cdot 2 = 12$	No se cumplen
4	3	$4 + 3 = 7$	$4 \cdot 3 = 12$	Si se cumplen

8. Hallar todos los valores de "a" tales que $x^3 - 6x^2 + 11x + a - 6 = 0$ tenga exactamente tres raíces enteras.
(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998)

SOLUCIÓN:

Sean x_1, x_2 y x_3 las raíces enteras de la ecuación dada entonces, de acuerdo con las fórmulas de Viêta, se tiene que $x_1x_2x_3 = 6 - a$, de donde se concluye que "a" debe ser un número entero. Por otro lado, haciendo el cambio de variable $x = y + 2$ la ecuación dada se transforma en $y^3 - y + a = 0$ cuyo discriminante es $D = \frac{a^2}{4} - \frac{1}{27}$.

Para que la ecuación posea raíces reales debe cumplirse que $D \leq 0$, es decir, $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{27} \leq 0$ con lo que $a \in \left[\frac{-1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}\right]$ cuyo único valor entero es a = 0.

Verificando este valor en la ecuación original, ésta se transforma en $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ cuyas soluciones son 1, 2 y 3 que satisfacen las condiciones del enunciado.

NOTA: en esta solución se hace uso del hecho de que toda ecuación cúbica de la forma $x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$ se puede reducir a la ecuación equivalente $y^3 + qy + r = 0$ mediante la sustitución $x = y - \frac{p_1}{3}$ y que el discriminante, de la ecuación resultante, D = $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ satisface

- Si D > 0 la ecuación posee dos raíces en $\mathbb{C}$ y una en $\mathbb{R}$.
- Si D = 0 la ecuación posee tres raíces reales, dos de ellas iguales.
- Si D < 0 la ecuación posee tres raíces reales distintas.

9. Sean a y b números reales que satisfacen $a^2 + b^2 = 1$. Pruebe que

$$| a^2b + ab^2 | \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998)

SOLUCIÓN:

Como $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$ para todos los números reales a y b entonces $2ab \leq a^2 + b^2 = 1$ y así

$$ab \leq \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Del mismo modo, como $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \geq 0$ para todos los números reales a y b entonces $2ab \geq -(a^2 + b^2) = -1$ y así

$$ab \geq -\frac{1}{2} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que

$$| ab | \leq \frac{1}{2} \quad (3).$$

Por otro lado,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \leq 1 + 1 = 2$$

y así

$$| a + b | \leq \sqrt{2}.$$

Luego,

$$| a^2b + ab^2 | = | ab (a + b) | = | ab | | a + b | \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}. = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10. Pruebe que todo número de la serie: 49, 4489, 444889, 44448889, … es un cuadrado perfecto.

NOTA: todo número de la serie está formado por n cuatros, n – 1 ochos y un nueve.

(Competición Matemática de la República de Eslovenia, 1998)

SOLUCIÓN:

$$\underbrace{44\ldots44}_{n}\underbrace{88\ldots88}_{n-1}9 = 44\ldots4400\ldots00 + 88\ldots880 + 9$$

$$= 44\ldots44\times10^{n} + 88\ldots88\times10 + 9 = 4(11\ldots11)\times10^{n} + 8(11\ldots11)\times10 + 9$$

$$= 4\times\frac{10^{n}-1}{9}\times10^{n} + 8\times\frac{10^{n-1}-1}{9}\times10 + 9 = \frac{4\times10^{2n}-4\times10^{n}}{9} + \frac{8\times10^{n}-80}{9} + \frac{81}{9}$$

$$= \frac{4\times10^{2n}+4\times10^{n}+1}{9} = \left(\frac{2\times10^{n}+1}{3}\right)^{2}$$

notemos que la expresión $2 \times 10^{n} + 1 = 200\ldots01$ es un número cuya suma de sus dígitos es tres y por tanto $\frac{2\times10^{n}+1}{3}$ es un entero. Se concluye así que todo número de la serie dada es un cuadrado perfecto.

NOTA: recordemos que $x^{n}-1 = (x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)$ de donde se obtiene que $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 = \frac{x^{n}-1}{x-1}$.

Por otro lado, tenemos que

$$\underbrace{111\ldots11}_{n} = 1+10+100+\cdots+1000\ldots0 = 1+10+10^{2}+\cdots+10^{n-1} = \frac{10^{n}-1}{10-1} = \frac{10^{n}-1}{9}$$

11. Determine el menor entero positivo cuyo primer dígito es 1 y satisface la siguiente propiedad: si este dígito es transferido al final del número original entonces el número formado es el triple del original.
(Olimpiada Colegial de Matemática de la Ciudad de San Petersburgo, 1986)

SOLUCIÓN:

Sea x el número de n – dígitos que se obtiene al borrar el primer dígito, en este caso 1, del número buscado. Dicho número buscado es entonces $10^n + x$ y el nuevo número es 10x + 1. La condición del problema nos conduce a

$$3(10^n + x) = 10x + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot 10^n - 1}{7}$$

que por ensayo y error encontramos n = 5 con lo que x = 42 857.

Por tanto, el número buscado corresponde a 142 857.

NOTA: el número 142 857 es el periodo de la fracción $\frac{1}{7}$ y cumple algunas propiedades interesantes como la enunciada en este problema, veamos algunas de ellas que, eventualmente, te podrían "inventar" algún problema:

- $142\,857 \times 2 = 285\,714$
- $142\,857 \times 3 = 428\,571$
- $142\,857 \times 4 = 571\,428$
- $142\,857 \times 5 = 714\,285$
- $142\,857 \times 6 = 857\,142$
- $142\,857 \times 7 = 999\,999$
- $142\,857 \times 8 = 1\,142\,856$

12. Pruebe que si un entero n es primo relativo con 10, la 101 potencia de n termina con los mismos tres últimos dígitos de n (por ejemplo, 1233^{101} termina en 233 y 37^{101} termina en 037).
(Olimpiada Colegial de Matemática de la Ciudad de San Petersburgo, 1986)

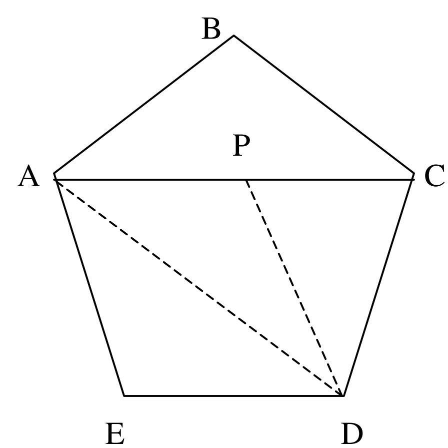
SOLUCIÓN:

Este problema puede ser caracterizado de la siguiente manera: si n es un número primo relativo con 10, entonces $n^{101} - n = n(n^{100} - 1)$ es divisible por 1000; esto es, $n^{100} - 1$ es divisible por 1000. En efecto, notemos primero que si n es un entero impar, entonces $n^{100} - 1 = (n^{50} + 1)(n^{25} + 1)(n^{25} - 1)$ es divisible por 8. Más aún, sabemos que si n no es divisible por 5, entonces $n^{100} - 1$ es divisible por 125.

Por tanto, $n(n^{100} - 1)$ es divisible por $8 \cdot 125$ lo que significa que $n^{101} - n$ termina en tres ceros y esto sucede si y sólo si n^{101} y n tienen sus tres últimos dígitos iguales.

13. Sean x la longitud de un lado y y la longitud de una diagonal de un pentágono regular. Pruebe que: $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 1.$

(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998



SOLUCIÓN 1:

Consideremos la figura adjunta.

Sea P un punto sobre AC tal que DP biseca a $\angle$ ADC entonces, como Δ AED es isósceles con AE = ED y $\angle$ AED = 108° se tiene que $\angle$ ADE = 36°.

Como AB = AC y $\angle$ ABC = 108° = $\angle$ BCD entonces $\angle$ BCA = 36° y $\angle$ PCD = 72° = $\angle$ CPD por lo que Δ PDC es isósceles con CD = PD = x.

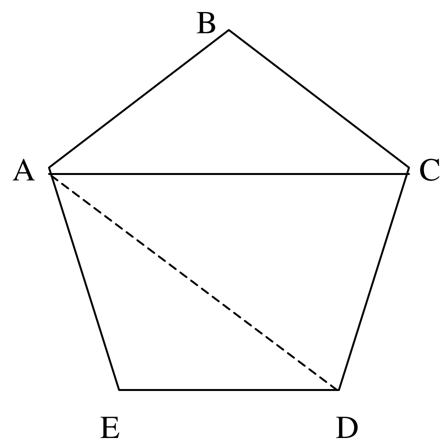
El Δ DAP es isósceles con AP = PD = x ya que $\angle$ APD = 180° – 72° = 108° y $\angle$ PAD + 72° + 36° = 180° de donde $\angle$ PAD = 36°.

De todo lo anterior podemos apreciar que Δ DPC ~ Δ ACD con lo que

$$\frac{PC}{PD} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow \frac{y-x}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} - 1 = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 1$$

SOLUCIÓN 2:

Consideremos la siguiente figura.



Es fácil verificar que $\angle$ BAC = $\angle$ EAD = $\angle$ CAD = 36° y x ≠ y.

Del Δ ABC, y aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene

$$\cos 36° = \frac{x^2 + y^2 - x^2}{2xy} = \frac{y}{2x} \qquad (1)$$

Del Δ ACD, y aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene

$$\cos 36° = \frac{y^2 + y^2 - x^2}{2y^2} = \frac{2y^2 - x^2}{2y^2} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) se tiene

$$\frac{y}{2x} = \frac{2y^2 - x^2}{2y^2} \Rightarrow y^3 = 2xy^2 - x^3 \Rightarrow x^3 - 2xy^2 + y^3 \Rightarrow (x-y)\left(x^2 + xy - y^2\right)$$

$$x^2 + xy - y^2 = 0 \Rightarrow xy = y^2 - x^2 \Rightarrow 1 = \frac{y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy} \Rightarrow 1 = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

14. Considere todas las parejas de números reales que satisfacen las inecuaciones:

$$-1 \le x + y \le 1 \;\; ; \;\; -1 \le xy + x + y \le 1$$

Sea M el máximo valor posible de x, determine M.

(44 Olimpiada Matemática Lituana, 1998)

SOLUCIÓN:

Hagamos el siguiente cambio de variables: $u = x + 1$, $v = y + 1$.

Las inecuaciones dadas equivalen a

$$1 \le u + v \le 3 \quad (1)$$

$$0 \le uv \le 2 \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce claramente que tanto u como v son ambos no negativos y así el máximo valor de u es 3. Finalmente, M = 2.

15. Pruebe que $2^n \bullet 3^{2n} - 1$ es siempre divisible por 17 para todo n natural.

(Concurso de problemas J.I.R M^c Knight, 1992)

SOLUCIÓN 1:

Notemos que

$$2^n \bullet 3^{2n} - 1 = 2^n \bullet (3^2)^n - 1 = 2^n \bullet 9^n - 1$$

$$= 18^n - 1 = (18 - 1)(18^{n-1} + 18^{n-2} + \ldots + 18^2 + 18 + 1)$$

de donde

$$2^n \bullet 3^{2n} - 1 = 17(18^{n-1} + 18^{n-2} + \ldots + 18^2 + 18 + 1)$$

por tanto, $2^n \bullet 3^{2n} - 1$ es siempre divisible por 17 para todo n natural.

NOTA: recordemos que

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)(x - 1) = x^{n+1} - 1$$

para todo n natural.

SOLUCIÓN 2:

$18 \equiv 1 (\text{mod } 17) \Rightarrow 18^n \equiv 1 (\text{mod } 17) \Rightarrow 18^n - 1$ es divisible por 17, pero, $18^n - 1 = (2 \cdot 3^2)^n - 1 = 2^n \bullet 3^{2n} - 1$. Por tanto, $2^n \bullet 3^{2n} - 1$ es siempre divisible por 17 para todo n natural.

16. Considere el sistema de ecuaciones

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_2 + x_3 = 4$$
$$x_3 + x_4 = 8$$
$$\vdots$$
$$x_{k-1} + x_k = 2^{k-1}$$
$$\vdots$$
$$x_{2000} + x_{2001} = 2^{2000}$$
$$x_{2001} + x_1 = 2^{2001}$$

Determine el valor de x_{2001} .

(Concurso de problemas J.I.R M^c Knight, 1992)

SOLUCIÓN:

El sistema de ecuaciones dado lo podemos expresar como

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$-x_2 - x_3 = -4$$
$$x_3 + x_4 = 8$$
$$\vdots$$
$$-x_{2000} - x_{2001} = -2^{2000}$$
$$x_{2001} + x_1 = 2^{2001}$$

sumando, miembro a miembro, las ecuaciones del sistema anterior se obtiene

$$2x_1 = 2 - 4 + 8 - 16 + \ldots + 2^{1999} - 2^{2000} + 2^{2001}$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + 2^{1998} - 2^{1999} + 2^{2000}$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{2^{2001}+1}{2+1} = \frac{2^{2001}+1}{3}$$

Luego, de $x_{2001} + x_1 = 2^{2001}$ se tiene $x_{2001} = 2^{2001} - x_1$ con lo que

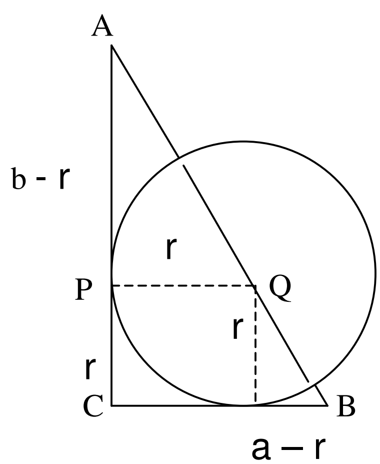
$$X_{2001} = 2^{2001} - \frac{2^{2001}+1}{3} = \frac{3\cdot 2^{2001} - 2^{2001} - 1}{3} = \frac{2\cdot 2^{2001} - 1}{3} = \frac{2^{2002}-1}{3}$$

NOTA: recordemos que $x^n + 1 = (x+1)\left(x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots + x^2 - x + 1\right)$ de donde $1 - x + x^2 - \cdots + x^{n-3} - x^{n-2} + x^{n-1} = \dfrac{x^n + 1}{x+1}$.

17. Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b. Una circunferencia de radio r es tangente a los dos catetos y tiene su centro sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. Demuestre que la suma de los recíprocos de a y b es igual al recíproco de r.
(6 Olimpiada Juvenil de Matemática, final nacional de 2° de diversificado, Venezuela, 1998)

SOLUCIÓN:

Consideremos la figura adjunta.



Es claro que Δ CAB ~ Δ RQB por el criterio a.a.a, luego

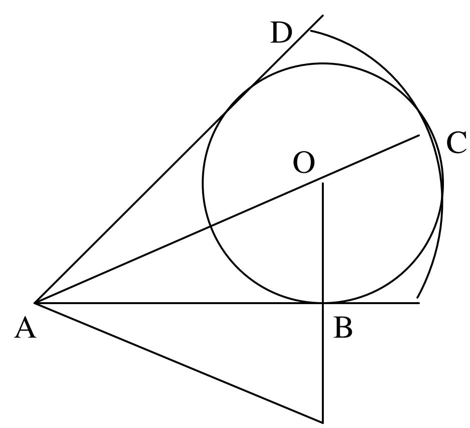
$$\frac{b}{a} = \frac{r}{a-r} \Rightarrow ab - br = ar \Rightarrow ab = ar + br \Rightarrow ab = r(a+b) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

18. Dentro de un sector circular, equivalente a un sexto de un círculo de radio r, se inscribe un círculo que es tangente a los dos radios y el arco del sector. Determine, en función de r, el radio del círculo inscrito.
(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, primera parte de la ronda final, 1998)

SOLUCIÓN:

Consideremos la siguiente figura.



Sea r_1 el radio del círculo menor entonces, desde que el triángulo Δ AOB es un triángulo semiequilátero, AO = 2 · OB = $2r_1$. Más aún, OC = r_1 y entonces

$AC = AO + OC = 2r_1 + r_1 = 3r_1 \Rightarrow r = 3r_1 \Rightarrow r_1 = \dfrac{r}{3}$.

19. Para un entero positivo n, sea f(n) el residuo de $n^2 + 2$ cuando se divide por 4. Por ejemplo, f(3) = 3, f(4) = 2. Pruebe que la ecuación $x^2 + (-1)^y f(z) = 10y$ no tiene soluciones enteras x, y, z.
(Concurso de problemas colegiales, Canadá, 1998)

SOLUCIÓN:

Notemos que $(2k)^2 \equiv 0 \pmod 4$ y $(2k + 1)^2 \equiv 0 \pmod 4$ lo que significa que todo cuadrado tiene residuo o ó 1 cuando se divide por 4. Entonces, cuando $n^2 + 2$ se divide por 4, sus posibles residuos son 2 ó 3. Así, f(z) es igual a 2 ó 3 para todo z. De aquí que $(-1)^y f(z) \equiv 2, 3, 7$ u $8 \pmod{10}$. Pero x^2 puede ser congruente con 0, 1, 4, 5, 6 ó 9 módulo 10.

De todo lo anterior $x^2 + (-1)^y f(z)$ nunca puede ser congruente con 0 módulo 10 lo cual significa que la ecuación $x^2 + (-1)^y f(z) = 10y$ no tiene soluciones enteras x, y, z.

20. Hallar todas las funciones reales f definida en el conjunto de los números reales excepto cero tal que

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, x \neq 0$$

(8 Olimpiada Koreana de Matemática, 1998)

SOLUCIÓN:

Como $\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, x \neq 0$ (1) entonces, multiplicando por x, se tiene

$$f(-x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

y, para $t \neq 0$, se tiene $f(-t) + t \cdot f\left(\frac{1}{t}\right) = t^2$ (2)

sustituyendo $t = \frac{1}{x}$ en (1) se tiene $t \cdot f\left(\frac{-1}{t}\right) + f(t) = \frac{1}{t}$ (3)

haciendo $t=-x$ en (2) y $t=x$ en (3) obtenemos

$$\begin{cases} f(x)-x\cdot f\left(\dfrac{-1}{x}\right)=x^2 \\ \\ f(x)+x\cdot f\left(\dfrac{-1}{x}\right)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

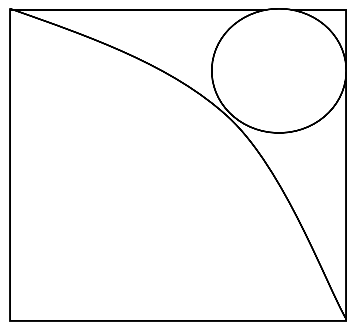
$$\Rightarrow 2\cdot f(x)=x+\frac{1}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$$

verificando (1) se tiene

$$\frac{1}{x}f(-x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{-x^3+1}{-2x}+\frac{\frac{1}{x^3}+1}{2\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{x^3-1}{2x^2}+\frac{x^3+1}{2x^2}=\frac{2x^3}{2x^2}=x$$

por lo tanto, $f(x)=\dfrac{x^3+1}{2x}$ es la única función.

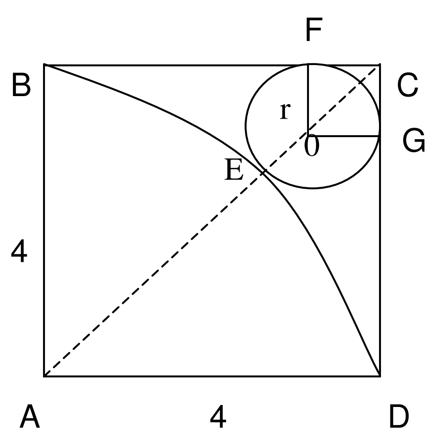
21. En la figura adjunta la cuarta parte de un círculo es inscrito en un cuadrado de lado 4. Hallar el radio del menor círculo que es tangente al cuarto del círculo y dos lados del cuadrado.



(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, primera parte de la ronda final, 1998)

SOLUCIÓN:

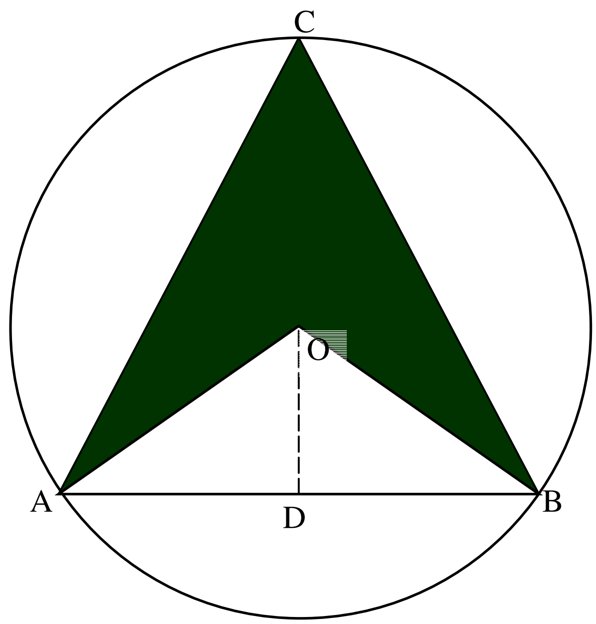
Considere la figura siguiente



Siendo OF y OG radios del círculo tangente a los lados del cuadrado en F y G respectivamente se tiene que OFCG es un cuadrado de lado r y diagonal OC = r $\sqrt{2}$. Además, AE = 4 y EO = r. Pero AC = 4$\sqrt{2}$ por ser la diagonal del cuadrado ABCD de lado 4, con lo que AC = AE + EO + OC entonces

$$4\sqrt{2} = 4 + r + r\sqrt{2} \Rightarrow 4\sqrt{2} - 4 = r(1+\sqrt{2}) \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}+1} = 12 - 8\sqrt{2}$$

22. En la figura adjunta, el radio del círculo es 1, el ángulo central AOB es recto y AC y BC son cuerdas de igual longitud. Determine el área sombreada.



(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, primera parte de la ronda final, 1998)

SOLUCIÓN 1:

Como AO = OB = 1 (por ser radios) y $\angle$ AOB = 90° entonces AB = $\sqrt{2}$ y OD = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ con lo que

$$(AOBC) = (ABC) - (AOB)$$

$$\Rightarrow (AOBC) = \frac{\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} - \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (AOBC) = \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

SOLUCIÓN 2:

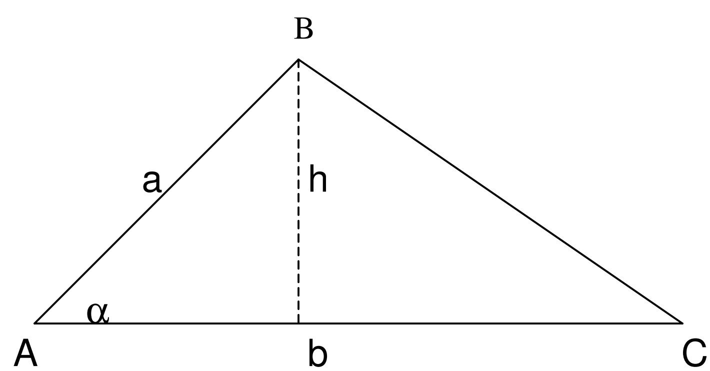
Se observa que Δ AOC $\cong$ Δ BOC por el criterio l.l.l con lo que (AOBC) = 2(AOC). Por otro lado, es fácil deducir que $\angle$ AOC = 135°.

Además, es conocido que si el ángulo comprendido entre dos lados a y b de un triángulo es α entonces su área está dada por $\frac{1}{2}$ab sen α.

Así, (AOC) = $\frac{1}{2}\cdot$ AO $\cdot$OC sen 135° con lo que (AOC) = $\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ y por tanto, (AOBC) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

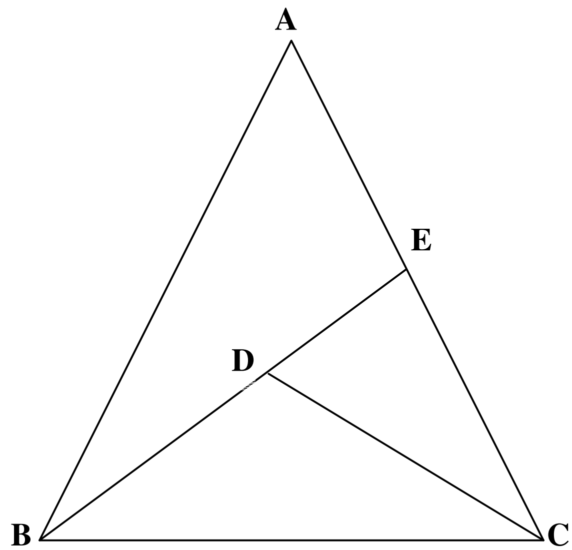
NOTAS:

- Recordemos que sen (180° – α) = sen α por lo que sen 135° = sen 45°.
- Consideremos la siguiente figura



De acuerdo con los datos de la figura se tiene que sen α = $\frac{h}{a}$ de donde h = a sen α. Por otro lado, (ABC) = $\frac{bh}{2} = \frac{ba\ sen\ \alpha}{2} = \frac{1}{2}ab \cdot sen\ \alpha$

23. En la figura adjunta, BD = 2, BC = 8 y ∠ ABC = ∠ BCA =∠ CDE =∠ DEC. Determine AB.



(Concurso de Matemática Colegial de la Columbia Británica, segunda parte de la ronda final, 1998)

SOLUCIÓN:

Tenemos que BE = BC = 8 dado que el Δ BCE es isósceles y DE = BE – BD = 8 – 2 = 6.

Por otro lado

$$\frac{CE}{6} = \frac{8}{CE}$$

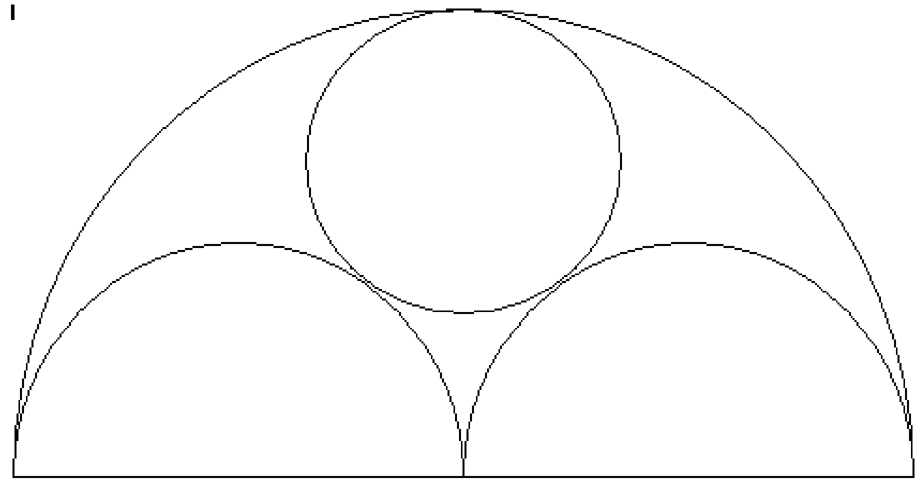
ya que Δ CBE ~ Δ DCE de donde $CE = 4\sqrt{3}.$

Finalmente,

$$\frac{AB}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{6}$$

por ser Δ ABC ~ Δ CDE. Se concluye que $AB = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

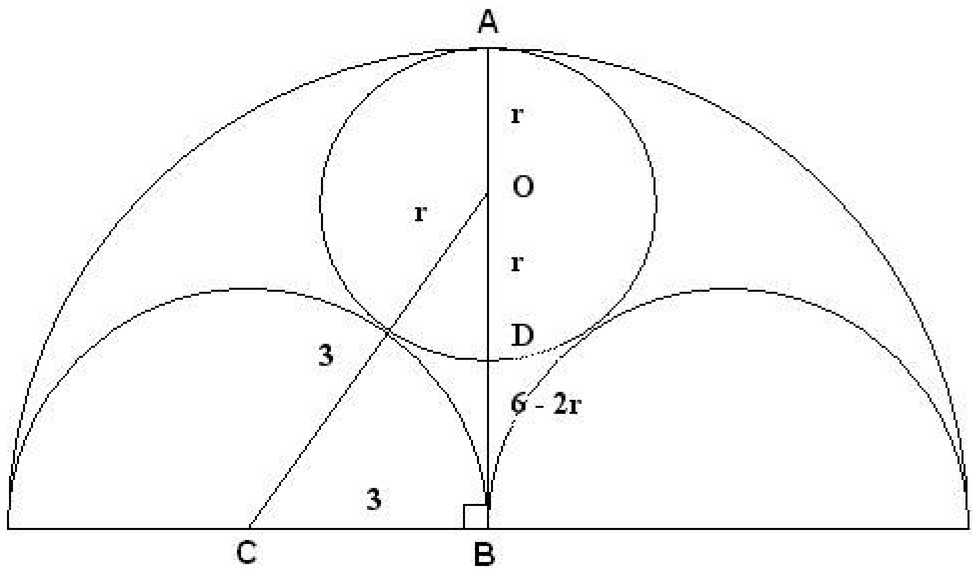
24. Dos semicírculos de radio 3 son inscritos en un semicírculo de radio 6. Un círculo es tangente a las tres semicircunferencias como se indica en la figura. Determine dicho radio.



(NLTA Math League, U.S.A, 1998 – 99)

SOLUCIÓN:

Consideremos la siguiente figura



Se observa que OA + OD + DB = AB $\Rightarrow$ DB = 6 – 2r $\Rightarrow$ OB = 6 – r y aplicando el teorema de Pitágoras a Δ COB se tiene $OC^2 = BC^2 + BO^2$ es decir $(3 + r)^2 = 3^2 + (6 - r)^2$ que al resolver nos produce r = 2.

Así, el radio buscado es 2.

25. Sean a, b, c y d enteros positivos tales que $a^5 = b^4$, $c^3 = d^2$ y $c - d$ = 19.

Determine $d - b$.

(Propuesto pero no usado en la III eliminatoria de OLCOMA, 1998)

SOLUCIÓN:

Notemos que, de la información brindada, $b = \sqrt[4]{a^5}$ y $d = \sqrt{c^3}$. Como b y d son enteros entonces deben existir enteros m y n tales que $a = n^4$ y $c = m^2$ con lo que

$$c - a = 19$$
$$\Rightarrow m^2 - n^4 = 19$$
$$\Rightarrow \left(m + n^2\right)\left(m - n^2\right) = 19$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m + n^2 = 19 \\ m - n^2 = 1 \end{cases}$$

ya que 19 es primo.

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene $m = 10$, $n = 3$, por lo que $b = \sqrt[4]{a^5} = n^5 = 243$ y $d = \sqrt{c^3} = m^3 = 1000$.

Por tanto, $d - b = 757$.

26. Sea M un conjunto formado por 17 enteros positivos cuyos divisores primos son menores o iguales que 7. Probar que existen en M dos números cuyo producto es un cuadrado perfecto.
(Propuesto pero no usado en la III eliminatoria de OLCOMA, 1998)

SOLUCIÓN:

Si a y b pertenecen a M, entonces $a = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^k \cdot 7^h$; $b = 2^s \cdot 3^r \cdot 5^t \cdot 7^w$ siendo los exponentes números enteros mayores o iguales que cero. Pero $ab = 2^{i+s} \cdot 3^{j+r} \cdot 5^{k+t} \cdot 7^{h+w}$ es un cuadrado si $i+s,\ j+r,$ $k+t,\ h+w$ son pares. Para ello basta que cada par de exponentes tengan la misma paridad respectivamente.

Analicemos cuantas situaciones hay para los cuatro exponentes (i, j, k, h); dos posibilidades para el primero (par o impar), dos posibilidades para el segundo, dos para el tercero y dos para el cuarto. En total son $2^4 = 16$.

Si el conjunto M tiene 17 elementos debe haber dos de ellos en los que los exponentes correspondientes a 2, 3, 5 y 7 tienen respectivamente la misma paridad. El producto de estos dos números es un cuadrado perfecto.

NOTA: en la solución de este ejercicio (y en ejercicios similares donde se busca que dos o más elementos de un conjunto cumplan una determinada condición) se hace uso del ***Principio del Palomar*** que nos indica que “si n + 1 palomas viven en n casitas al menos dos palomas viven en la misma casita”

27. Sea $f(x) = x^3 - (a + 2)x - 4a$, con $0 < a < 1$. Si $f(x)$ interseca al eje X en x_0, pruebe que

$$a + 1 < x_0 < a + 2$$

(CEOC, 2000)

SOLUCIÓN:

Como $f(X)$ es una función polinomial entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por lo que la desigualdad propuesta equivale a

$$f(a + 1) < f(x_0) < f(a + 2)$$

o bien

$$f(a + 1) < 0 \qquad (1)$$

$$f(a + 2) > 0 \qquad (2)$$

En efecto,

- $f(a + 1) = (a + 1)^3 - (a + 2)(a + 1) - 4a$

$\Rightarrow f(a + 1) = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^2 - 3a - 2 - 4a$

$\Rightarrow f(a + 1) = a^3 + 3a^2 - 4a - 1$

$\Rightarrow f(a + 1) = (a^3 - a) + (3a^2 - 3a) - 1$

$\Rightarrow f(a + 1) = a(a + 1)(a - 1) + 3a(a - 1) - 1 < 0$; por ser $0 < a < 1$.

- $f(a + 2) = (a + 2)^3 - (a + 2)(a + 2) - 4a$

$\Rightarrow f(a + 2) = a^3 + 6a^2 + 12a + 8 - a^2 - 4a - 4 - 4a$

$\Rightarrow f(a + 2) = a^3 + 5a^2 + 4a + 4 > 0$

Con lo que se prueba que $a + 1 < x_0 < a + 2$

28. Las longitudes a, b, c de los lados de un triángulo satisfacen la igualdad

$$(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$$

Determine la medida del ángulo C, opuesto al lado de longitud c.

(Prueba por equipos, VII Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 1992)

SOLUCIÓN:

La igualdad dada en el enunciado es equivalente a

$$(a + b)^2 - c^2 = 3ab$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 3ab$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 - c^2 = ab \quad (1)$$

De la Ley de los Cosenos se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\Rightarrow \quad 2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2 \quad (2)$$

sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$2ab \cos C = ab$$

$$\Rightarrow \cos C = 0,5$$

siendo C la medida del ángulo de un triángulo y el coseno de ese ángulo es mayor que cero entonces el ángulo debe ser agudo y, en este caso, C = 60°.

29. Al sumar un número de dos dígitos con el número que resulta al invertir los dígitos del mismo se obtiene un cuadrado perfecto.

Determine todos los números que satisfagan la condición anterior.

(Olimpiada Colegial de Matemática de la Ciudad de San Petersburgo, 1986)

SOLUCIÓN:

Sean a y b el dígito de las decenas y unidades del número original, entonces

$$(10a + b) + (10b + a) = k^2$$

$$\Rightarrow 11(a + b) = k^2$$

donde k es un entero.

Se nota que k^2 es divisible por 11; con lo cual a + b también es divisible por 11. Siendo $a + b \leq 18$ (por ser a y b dígitos) esto implica que a + b = 11 ó $k^2 = 121$. Las únicas posibilidades para los enteros son

29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92

30. El entero A consiste de 666 dígitos iguales a 3, y el entero B tiene 666 dígitos iguales a 6.

Determine $A \cdot B$.

(Olimpiada Colegial de Matemática de la Ciudad de San Petersburgo, 1986)

SOLUCIÓN:

Siendo $6 = 3 \cdot 2$, el producto $A \cdot B$ puede ser obtenido multiplicando el entero A_1 que consiste en 666 dígitos iguales a 9 por el entero B_1 compuesto de 666 dígitos iguales a 2. Pero $A_1 = 10^{666} - 1$; de donde

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A_1 \cdot B_1 \\ &= (10^{666} - 1)B_1 \\ &= 10^{666} B_1 - B_1 \\ &= 22\ldots2177\ldots78 \end{aligned}$$

en donde 2l dígito 2 aparece 665 veces del mismo que el dígito 7.

4. Solución a Selección de problemas.

Jorge Obando Toruño

José Virgilio Reyes Pérez

1. Determine el valor de la suma $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 100 \cdot 2^{99}$.

SOLUCIÓN OFICIAL 1:

La suma dada puede expresarse como

$$\left\{\begin{array}{r} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99} \\ 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99} \\ 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99} \\ \ldots \\ 2^{98} + 2^{99} \\ 2^{99} \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99} \\ 2(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{98}) \\ 2^2(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{97}) \\ \qquad \ldots \\ 2^{98}(1 + 2) \\ 2^{99}(2 - 1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{100} - 1 \\ 2^{100} - 2 \\ 2^{100} - 2^2 \\ \ldots \\ 2^{100} - 2^{98} \\ 2^{100} - 2^{99} \end{array}\right. = 100 \cdot 2^{100} - (2^{100} - 1) = 99 \cdot 2^{100} + 1$$

NOTA: Aquí se hace uso de la conocida identidad $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN OFICIAL 2:

Es conocido que: $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ luego

$$\left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \Rightarrow \frac{(n+1)x^n (x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

Consideremos x = 2 y n = 100, con los que se obtiene el resultado pedido.

2. Determine si los siguientes números son iguales o cuál es el mayor de ellos.

$$A = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} \quad y \quad B = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

SOLUCIÓN OFICIAL:

¡Son iguales! esto debido a que es una identidad de Ramanujan.

Sean $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ y $y = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; es suficiente probar que

$$(x+y)(\sqrt[3]{2}-1)^{\frac{1}{3}} = x^3 + y^3 = 1$$

o equivalentemente $(\sqrt[3]{2}+1)^3(\sqrt[3]{2}-1) = 3.$

3. Al concluir el primer torneo inter-especies de fútbol, en el cual cada equipo jugó una sola vez contra los otros dos, las estadísticas más relevantes del torneo escritas por los Zecrofianos y los Valudianos son, respectivamente,

	Ganados	Empatados	Perdidos	Goles en contra	Goles a favor	Puntos
Zecrofia	c	b	b	cc	ffh	d
Tierra	b	b	c	fbe	ff	b
Valudia	f	b	f	ah	db	c

	Ganados	Empatados	Perdidos	Goles en contra	Goles a favor	Puntos
Valudia	p	x	p	pxq	ppr	r
Zecrofia	r	x	x	mm	mxr	q
Tierra	x	x	r	rqp	pq	x

Cada una de estas hojas de estadísticas es equivalente a la otra y son correctas. Cada una, sin embargo, está escrita en el sistema de numeración de cada especie. La base de cada sistema es menor que 10 pero mayor que 1. Los Zecrofianos y Valudianos usan las mismas operaciones de suma, resta, división y multiplicación y las reglas de manipulación de éstas que se utilizan en la Tierra. Cada letra representa un dígito. Se asignan dos puntos por victoria y un punto por empate. Determine la hoja de estadística que presentaría un humano.

SOLUCIÓN OFICIAL:

Iniciemos analizando la hoja de estadística de los Zecrofianos, veamos que la Tierra a ganado y empatado b partidos por lo que su puntuación debe ser 3b puntos. Como la Tierra tiene b puntos entonces b = 0. Cada equipo jugó dos partidos con lo que c = 2 y f = 1. Zecrofia ganó los dos partidos entonces d = 4. Un análisis similar para la hoja de estadística de los Valudianos nos permite determinar que x = 0, p = 1, r = 2, q = 4.

Denotemos con s la base del sistema de numeración utilizada por los Zecrofianos y t la utilizado por los Valdivianos. Comparando las dos hojas de estadísticas, hallamos que los goles a favor de la Tierra satisface $11_s = 14_t$ entonces $s + 1 = t + 4 \Rightarrow s = t + 3$. Efectuando la misma comparación de los Valudianos se obtiene $40_s = 112_t \Rightarrow 4s = t^2 + t + 2 \Rightarrow t^2 + t + 2 = 4(t + 3) \Rightarrow t = 5$ y $s = 8$. Zecrofia tiene $22_8 = 18$ goles en contra y $mm_5 = 18$ implica que m = 3. Los goles a favor de Zecrofia es igual a $302_5 = 77$ así $11h_8 = 77$ implica h = 5. Para Valudia tenemos $104_5 = 29$ así $a5_8 = 29$ y a = 3. La hoja de estadística terrestre será

	Ganados	Empatados	Perdidos	Goles en contra	Goles a favor	Puntos
Tierra	0	0	2	71	9	0
Valudia	1	0	1	29	32	2
Zecrofia	2	0	0	18	77	4

NOTA: recordemos que si $A = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b$ está escrito en base b entonces el mismo número escrito en base 10 se expresa en la forma

$$a_0 + b \cdot a_1 + b^2 \cdot a_2 + \cdots + b^{n-1} \cdot a_{n-1} + b^n \cdot a_n$$

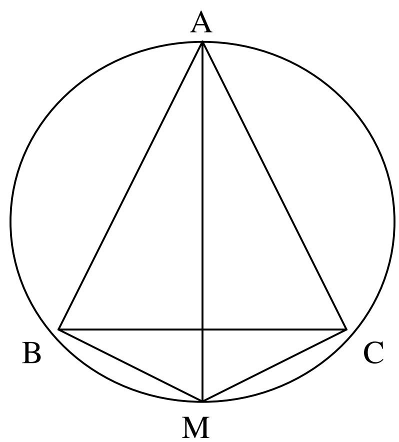
en donde b es un entero mayor que 1.

4. Sea ABC un triángulo equilátero inscrito en un círculo de centro O, M es un punto sobre el arco BC tal que A y M están en lados opuestos del segmento BC.

Demuestre que AM = BM + MC.

SOLUCIÓN OFICIAL:

Consideremos la figura siguiente,



es claro que, por el teorema de Ptolomeo,

$$BM \cdot AC + MC \cdot AB = AM \cdot BC$$

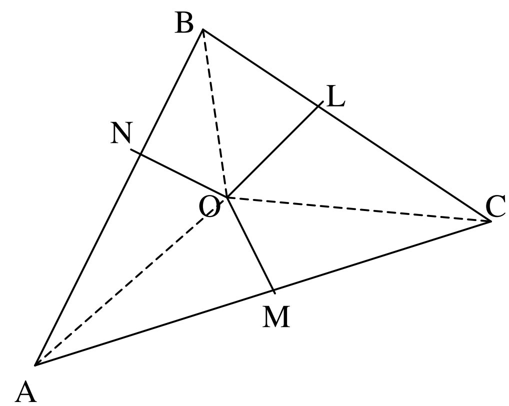
Pero, como AC = BC = AC, se cumple

$$BM + MC = AM$$

5. Pruebe que en cualquier triángulo acutángulo, la suma del circunradio y el inradio es menor que la longitud del lado de segunda mayor longitud.

SOLUCIÓN OFICIAL 1:

En la figura adjunta, O es el circuncentro del triángulo ABC con circunradio R e inradio r, y OL, OM, ON son las perpendiculares a BC, CA, AB respectivamente.



Entonces, tenemos que R + r = OL + OM + ON. Sean BC = a, CA = b, AB = c y asumamos, sin pérdida de generalidad, que $a \geq b \geq c$. Sea CH la altura y S el área del triángulo ABC. Entonces $c \cdot CH = 2S = a \cdot OL + b \cdot OM + c \cdot ON$ de donde $c \cdot CH = 2S \geq c\,(OL + OM + ON)$ así, tenemos que (siendo $\angle$ A agudo)

$$b > CH \geq OL + OM + ON = R + r$$

SOLUCIÓN OFICIAL 2:

Sea el triángulo ABC con $a \leq b \leq c$. Siendo $90° > B > 90° - A$, tenemos que $\cos B < \cos (90° - A) = \operatorname{sen} A$, y similarmente, $\cos A < \operatorname{sen} B$. Más aún

$$(1 - \cos A)(a - \cos B) > (1 - \operatorname{sen} A)(1 - \operatorname{sen} B)$$

efectuando las operaciones indicadas y ordenando obtenemos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B > \cos A + \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos B$$
$$= \cos A + \cos B + \cos C$$

como $\operatorname{sen} A = a / 2R$, $\operatorname{sen} B = b / 2R$ y $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + R / r$ tenemos que $a / 2R + b / 2R > 1 + R / r \Rightarrow (a + b) / 2 > R + r \Rightarrow b \geq (a + b) / 2 > R + r$ de donde se concluye que $b > R + r$.

6. Determine todas las soluciones enteras de la ecuación $x^4 = y^2 + 71$.

SOLUCIÓN OFICIAL:

La ecuación dada puede expresarse como $x^4 - y^2 = 71$ esto es, $(x^2 + y)(x^2 - y) = 71$. Ahora bien, como 71 es primo se debe cumplir

$$\begin{cases} x^2 + y = 71 \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x^2 - y = 71 \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} x^2 = 36 \\ y = 35 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x^2 = 36 \\ y = -35 \end{cases}$$

esto es

$$\begin{cases} x = \pm 6 \\ y = 35 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = -35 \end{cases}$$

por lo que las soluciones de la ecuación dada satisfacen

$$(x, y) \in \{(-6, -35\}, (-6, 35\}, (6, -35\}, (6, 35\}\}$$

7. Suponga que α, β, γ son ángulos agudos tales que

$$\frac{sen(\alpha-\beta)}{sen(\alpha+\beta)}+\frac{sen(\beta-\gamma)}{sen(\beta+\gamma)}+\frac{sen(\gamma-\alpha)}{sen(\gamma+\alpha)}=0$$

Pruebe que al menos dos ángulos de ellos son iguales.

SOLUCIÓN OFICIAL:

Notemos que

$$\frac{sen(\alpha-\beta)}{sen(\alpha+\beta)}=\frac{sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha}{sen\alpha\cos\beta+sen\beta\cos\alpha}=\frac{\dfrac{sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{sen\alpha\cos\beta+sen\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{sen\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{sen\beta}{\cos\beta}}$$

de donde $\frac{sen(\alpha-\beta)}{sen(\alpha+\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$. Procediendo de forma similar con las demás fracciones de la identidad del enunciado ésta puede ser expresada como

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}+\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{\tan\beta+\tan\gamma}+\frac{\tan\gamma-\tan\alpha}{\tan\gamma+\tan\alpha}=0$$

efectuando las operaciones indicadas y simplificando se obtiene

$$(\tan\alpha-\tan\beta)(\tan\beta-\tan\gamma)(\tan\gamma-\tan\alpha)=0$$

para que la anterior igualdad sea verdadera debe cumplirse que

$$\tan\alpha=\tan\beta \text{ o bien } \tan\beta=\tan\gamma \text{ o bien } \tan\gamma=\tan\alpha$$

y como los ángulos son agudos se sigue que

$$\alpha=\beta \text{ o bien } \beta=\gamma \text{ o bien } \gamma=\alpha$$

lo cual significa que al menos dos ángulos son iguales, lo que concluye nuestra prueba.

8. Hallar todas las soluciones enteras de $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn^2}=\frac{3}{4}$

SOLUCIÓN OFICIAL:

Notemos que $m \neq 0$ y $n \neq 0$. La ecuación dada puede ser expresada como

$$\frac{n^2+mn-1}{mn^2}=\frac{3}{4}$$

despejando se obtiene

$$m=\frac{4(n+1)(n-1)}{n(3n-4)}$$

como el máximo común divisor de dos números consecutivos es uno, entonces n no divide ni a $n-1$ ni a $n+1$ por lo que debe dividir a 4, esto es, $n=\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Si $n=\pm 1$ entonces $m=0$ lo cual no es posible.

Si $n=-2$, entonces m no es un entero.

Si $n=2$, entonces $m=3$.

Si $n=-4$, entonces m no es un entero.

Si $n=4$, entonces m no es un entero.

Así, la única solución es (2, 3).

9. Dos números son tales que la suma de sus cubos es 5 y la suma de sus cuadrados es 3. Determine la suma de los dos números.

SOLUCIÓN OFICIAL 1:

Sean x, y los números, entonces $x^3 + y^3 = 5$ (1); $x^2 + y^2 = 3$ (2).

De (2) obtenemos $(x + y)(x^2 + y^2) = 3(x + y)$ la que es equivalente a

$$(x^3 + y^3) + xy(x + y) = 3(x + y) \Rightarrow 5 + xy(x + y) = 3(x + y)$$

$$\Rightarrow xy(x + y) = 3(x + y) - 5 \quad (3)$$

De (1) se obtiene $5 = x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$, sustituyendo (3) en esta ecuación se obtiene $(x + y)^3 - 3[3(x + y) - 5] = 5$. Haciendo la sustitución $u = x + y$ la ecuación anterior es equivalente a $u^3 - 9u + 10 = 0$ cuyas soluciones son 2, $-1-\sqrt{6}$ y $-1+\sqrt{6}$.

SOLUCIÓN OFICIAL 2:

Sean x, y tales que $x^3 + y^3 = 5$; $x^2 + y^2 = 3$. Sea $x + y = A$.

De $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ entonces,

$$A^3 = 5 + 3xyA \qquad (1)$$

De $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow A^2 = 3 + 2xy \Rightarrow 0,5(A^2 - 3) = xy$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$A^3 = 5 + 1,5(A^2 - 3)A$$

$$\Rightarrow A^3 = 5 + 1,5A^3 - 4,5A$$

$$\Rightarrow 0,5\,A^3 - 4,5A + 5 = 0$$

cuyas soluciones son 2, $-1-\sqrt{6}$ y $-1+\sqrt{6}$.

10. El producto de dos de las cuatro raíces de la ecuación $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ es -32. Determine el valor de k.

SOLUCIÓN OFICIAL:

De las Fórmulas de Viêta se tiene que, siendo x_1, x_2, x_3, x_4 las raíces de la ecuación dada, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -1984$. Sean x_1, x_2 tales que $x_1 \cdot x_2 = -32$ entonces $x_3 \cdot x_4 = 62$. Como la ecuación es de grado cuatro entonces existen a y b tales que $(x^2 + ax + 62)(x^2 + bx - 32) = x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ efectuando las operaciones indicadas e identidad polinomial se obtiene:

$$a + b = -18 \qquad (1)$$

$$k = 30 + ab \qquad (2)$$

$$62b - 32a = 200 \qquad (3)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) e obtiene $a = -14$ y $b = -4$ con lo que, sustituyendo en (2), concluimos que $k = 86$.

5. Selección de problemas.

Jorge Obando Toruño

José Virgilio Reyes Pérez

1. Dado el polinomio $p(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, pruebe que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D = C^3$.
(Olimpiada Matemática Española, Fase Local 2003)

2. Si p es un número real y las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, halla dichas raíces.
(Olimpiada Matemática Española, Fase Local 2002)

3. Demuestre que para cualquier entero positivo n, el número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804.
(I Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 1987)

4. Sea G el baricentro del triángulo ABC. Si se verifica que AC + GC = AB + GB demostrar que el triángulo es isósceles.
(Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional 1996)

5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida como sigue:
   a) $f(1) = 1$
   b) $f(2) = 5$
   c) $f(n + 1) = f(n) + 2f(n - 1)$

   Determine una fórmula, en términos de n, para f(n) y calcule f(1994).
(VI Olimpiada Costarricense de Matemática, 1994)

6. Considérese un triángulo ABC en el que la longitud de AB es 5 cm, las medianas por A y por B son perpendiculares entre sí y el área es 18 cm^2. Hallar las longitudes de los lados BC y AC.
(VI Olimpiada Costarricense de Matemática, 1994)

7. Los números reales α, β satisfacen las ecuaciones $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0$, $\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0$. Hallar $\alpha + \beta$.
(VI Olimpiada Irlandesa de Matemática, 1993)

8. Sean $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ números reales donde $n \geq 1$ y sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ tal que $|f(0)| = f(1)$ y cada raíz α de f es real y satisface $0 < \alpha < 1$.

Pruebe que el producto de las raíces es menor o igual que $\frac{1}{2^n}$.

(VI Olimpiada Irlandesa de Matemática, 1993)

9. Si $x + y + z = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ determine el valor de $x^4 + y^4 + z^4$.
(Olimpiada Japonesa de Matemática, 1995. Olimpiada Costarricense de Matemática, 1995)

10. Los números naturales a y b verifican la condición 56a = 65b. Demuestre que a + b no es primo.
(Círculo Matemáticos Rusos, primer nivel, 1999)

6. Lógica y Matemática Recreativa.

Maynor Castro
Randall Godínez.
Arlene Martínez
Carlos Molina
Mauricio Ramírez
Melissa Ramírez
Carlos Rodríguez
Simón Sánchez
Erick Solano

En esta nueva sección se provee una serie de ejercicios sobre uno de los tópicos de Matemática que han sido eliminados del quehacer educativo, tanto en primaria como en secundaria, perdiéndose así una fuente rica y divertida de hacer Matemática.

Este tipo de problemas permiten despertar en el estudiante ese gusto por la Matemática tan venido a menos en estos tiempos. Nuestro objetivo, como estudiantes que participaron de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática, es que, al finalizar su planeamiento diario, el docente le plantee a sus estudiantes estos problemas como reto extracurricular a sus alumnos y seguro estamos que obtendrá una mejor disposición del estudiante en sus lecciones futuras. No esta demás recordarle al docente que resuelva y seleccione adecuadamente el problema a proponer para no crear el efecto contrario al deseado, es decir, crear en el estudiante aberración a la Matemática por no poder resolver el problema. Más bien, aumente progresivamente el nivel de dificultad.

1. En una isla hay tres tipos de habitantes: los caballeros que siempre dicen la verdad; los escuderos, que siempre mienten; y las personas normales, que unas veces mienten y otras dicen la verdad. De las tres personas A, B y C, una es caballero, otra escudero y la tercera normal, pero no necesariamente en ese orden. Dicen lo siguiente

A: Yo soy normal.

B: Eso que ha dicho A es verdad.

C: Yo no soy normal.

¿ Qué son, respectivamente, A, B y C?

(XI Olimpiada regional de Soria, 2003, 12 – 13)

2. Cora, Berta, Sara, Diego, Ezequiel y Federica son coleccionistas de cuadros y dos de ellos son hermanos. Un día fueron a una exposición y compraron de la siguiente manera:

__ Cora compró 1 cuadro, Berta 2, Sara 3, Diego 4, Ezequiel 5 y Federico 6.

__ Los dos hermanos pagaron la misma cantidad por cada uno de los cuadros que compraron.

__ Los demás del grupo pagaron por cada cuadro el doble de lo que pagaron los hermanos por cada uno de los suyos.

__ En total pagaron 100 000 euros.

__ El precio de cada cuadro era un número entero de euros.

¿ Quiénes son hermanos ?

(XI Olimpiada regional de Valladolid, 2003 , 14)

3. En la cocina había un pastel para el cumpleaños de papá, pero al llegar éste, ha desaparecido. En la casa hay 5 hijos: Ataúlfo, Basilia, Calepodio, Desdémona y Efialtes. Mamá sabe que alguno de ellos, o varios, son autores de la desaparición, y los interroga. Las respuestas son

Ataúlfo: Esto es obra de uno solo de nosotros.

Basilia: No, de dos de nosotros.

Calepodio: No, de tres de nosotros.

Desdémona: No, de cuatro de nosotros.

Efialtes: Entre todos nos lo comimos.

¿ Quién o quienes se comieron el pastel ?

(XI Olimpiada regional de Valladolid, 2003 , 12 – 13)

4. Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

NOTA: Se entiende por estrategia ganadora un método de juego que le garantiza la victoria al que lo aplica sin importar lo que haga su oponente.

(V Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe, Costa Rica, 2003)

5. Isa invita a 17 amigos a su fiesta de cumpleaños. Asignó a cada invitado un número, desde el 2 hasta el 18, reservándose el 1 para ella misma. Cuando todo el mundo estaba bailando, se dio cuenta de que la suma de los números asignados a cada pareja era cuadrado perfecto. ¿ Cuál es el número de la pareja de Isa ?

   (Problema propuesto en la XIV Olimpiada Matemática para alumnos de 2° E.S.O., 2003)

6. Marta piensa en la tienda:

__ Si me compro la camiseta y el chaleco, me gasto 53.75 euros.

__ La camiseta y el pañuelo me cuestan 51.25 euros.

__ El chaleco y el pañuelo me salen por 60 euros justos.

¿ Cuál es el precio de cada uno de los artículos ?

(XII Olimpiada regional de Castilla y León, 2004, 13 – 14)

7. En un lejano planeta de otra galaxia hay dos formas de vida mutuamente hostiles: los Septicapita, que tienen 7 cabezas y dos patas, y los Pentápodos, que tienen 2 cabezas y 5 patas. Un día, un número impar de Septicapita se encuentra con un número impar de Pentápodos y se organiza una gran tumulto; un observador contó 180, entre cabezas y patas. ¿ Cuántos ejemplares de cada especie intervinieron en la pelea ?

(1ª Fase de la XXXIX Olimpiada Matemática Española, 2003)

8. En una tribu india del amazonas, donde todavía subsiste el trueque, se tienen las siguientes equivalencias de cambio

__ Un collar y una lanza se cambian por un escudo.

__ Una lanza se cambia por un collar y un cuchillo.

__ Dos escudos se cambian por tres cuchillos.

¿ A cuántos collares equivale una lanza ?

(X Olimpiada Castellano Leonesa de Matemática de 2° E. S.O, España)

9. Las abejas macho nacen de huevos sin fecundar, y por tanto tienen madre, pero no padre, Las abejas hembras nacen de huevos fecundados. ¿ Cuántos antepasados tendrá una abeja macho en la duodécima generación ? ¿ Cuántos de ellos serán machos ?

(Fase Final, X Olimpiada Provincial de Matemática, Olmedo, España, 2002)

10. Dos jugadores, juegan de la siguiente manera: Dado un número N de objetos (N > 1), los dos jugadores tienen la facultad de tomar alternativamente 1, 2 ó 3 objetos. El jugador que toma el último objeto pierde.

¿ Cuál de los dos jugadores, y en qué casos, tiene una estrategia ganadora ?

(CEOC, 1996)