

Teoría de Números

PROBLEMAS DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

Estos ejercicios fueron recopilados de los exámenes de las diferentes eliminatorias del año 2000, 2002, 2004 y 2006. Asimismo de la 1^{ra}, 2^{da} y 3^{ra} Capacitación para Profesores Formadores de Competidores Olímpicos; 2004, 2005 y 2006.

1. La cantidad de números enteros positivos a y b , tales que su máximo común divisor es igual a 10 y su mínimo común múltiplo es igual a 100, es
 - A) 1
 - B) 2
 - C) 3
 - D) 4
2. Si p y $p^2 + 8$ son primos, ¿cuál es el valor de $p^3 + 4$?
 - A) 3
 - B) 17
 - C) 19
 - D) 31
3. La cantidad de parejas (p, q) de números primos tales que $(p^2 + q)$ y $(p^3 + q^2)$ sean números primos también, es igual a
 - A) 4
 - B) 2
 - C) 6
 - D) 1
4. ¿Cuántas parejas de primos positivos (p, q) cumplen que $p - q = 3$?
 - A) 1 pareja
 - B) 2 parejas
 - C) ninguna pareja
 - D) infinitas parejas
5. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número obtenido al multiplicar todos los primos menores o iguales que 2005?
 - A) 0
 - B) 2
 - C) 5

- D) 6**
6. Sea p un número primo tales que $p^2 + 77$ tiene exactamente 5 divisores positivos diferentes. Los números que cumplen esta propiedad son el
- A) 2**
B) 2 y 3
C) 5 y 7
D) 11 y 13
7. La suma de los factores primos del entero positivo $n = 2^{16} - 1$, es igual a
- A) 279**
B) 119
C) 282
D) 189
8. Sea $m = 3^{13} + 5^{13}$, el menor número primo p que divide a m es
- A) $p = 3$**
B) $p = 2$
C) $p = 5$
D) $p = 13$
9. ¿Cuál es el menor número primo que divide la suma $3^{11} + 5^{13}$?
- A) 2**
B) 3
C) 5
D) $3^{11} + 5^{13}$
E) ninguno de estos
10. Las computadoras de Mario y Fabio deben enviar correos electrónicos. La computadora de Mario está programada para enviar correos cada 84 segundos y la computadora de Fabio cada 110 segundos. Estas computadoras están en red y por cierto problema no pueden enviar un correo simultáneamente, pues colapsa el sistema. Si Fabio y Mario ponen las computadoras a enviar un correo a las 9:00 am y salen a desayunar, entonces para que no colapse el sistema deben volver antes de las
- A) 9:38 am**
B) 9:07 am
C) 10:17 am
D) 10:07 am
11. Un semáforo tarda 45 segundos en verde, 40 en amarillo y 30 en rojo, y sigue el orden verde-amarillo-rojo-verde-amarillo-rojo, etc. Si a las 7:00am cambia de rojo a verde, el color que estará el semáforo a las 14:34 horas

- A) es rojo
B) es verde
C) es amarillo
D) no es posible determinarlo
12. Se tienen cuatro números enteros consecutivos ordenados de menor a mayor. Si al cubo del cuarto número se le resta el cubo del tercero, a este resultado se le suma el cubo del segundo y a esto se le resta el cubo del primero, entonces sobre el número obtenido podemos asegurar que
- A) es divisible por 2 pero no por 3
B) es divisible por 6
C) es divisible por 3 pero no por 2
D) no es divisible ni por 2 ni por 3
13. Sean a y b números naturales con $a > b$. Entonces del entero positivo m definido por $m = (2a + 1)^2 - (2b + 1)^2$ se puede afirmar que es divisible por
- A) 3
B) 8
C) 16
D) 9
14. La conjetura de Goldbach establece que para cualquier entero par mayor que 7 puede escribirse como la suma de dos diferentes números primos. Para el número 126, la mayor diferencia entre estos dos posibles números primos es
- A) 112
B) 100
C) 92
D) 88
E) 80
15. Si $p \geq 5$ y es un número primo, entonces 24 divide a $p-1$ sin residuo
- A) nunca
B) algunas veces
C) siempre
D) solo si $p=5$
E) ninguno de estos casos

1. Probar que si n es impar, entonces $n^2 - 1$, es divisible por 8.
2. ¿Es el número 37438974 múltiplo de 9?
3. ¿Cuál es el mayor número menor que 100, que al dividirlo por 23, su cociente es igual al resto?

Bibliografía

- [1] Calendario CIEMAC 2006. Escuela de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- [2] Cien Problemas de Matemáticas: combinatoria, álgebra, geometría. Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Valladolid. Francisco Bellot Rosado, Maria Ascención López Chamorro, 1994.
- [3] La Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana y Academia de la Investigación Científica, A.C.
- [4] La Prueba de Aptitud Académica. Proceso de Admisión 2004-2005. Universidad de Costa Rica.
- [5] Problemas de Preparación para las Olimpiadas Costarricenses de Matemática. Editorial UNED.
- [6] The Contest Problem Book IV. Annual High School Examinations, 1973-1982 of The Mathematical Association of America.
- [7] The Contest Problem Book V. American High School Mathematics Examinations and American Invitational Mathematics Examinations, 1983-1988.
- [8] Vivas, Arache. Test de Lógica e Inteligencia.