Álgebra

PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS MATEMÁTICAS

Estos ejercicios fueron recopilados de los examenes de las diferentes eliminatorias del año 2000, 2002, 2004 y 2006. Asimismo de la 1^{ra}, 2^{da} y 3^{ra} Capacitación para Profesores Formadores de Competidores Olímpicos; 2004, 2005 y 2006.

---

1. Si «n» representa un número entero positivo, ¿ cuál de las siguientes fracciones es **menor** que la unidad ?

   A) $n+\frac{1}{2}$

   B) $n+\frac{1}{n}$

   C) $\frac{n}{n+2}$

   D) $\frac{2n}{n+1}$

2. Si, $3^x 4^x - 1 = (\frac{1}{11})^{-1}$, entonces

   A) 1

   B) 2

   C) 3

   D) 4

3. Al finalizar el año 1994 la edad de Rodrigo era un medio de la edad de su abuela. La suma de los años en que nacieron los dos es 3844. ¿ Cuántos años tendrá Rodrigo al finalizar el año 2003?

   A) 9 años

   B) 57 años

   C) 96 años

   D) 105 años

4. La operación «$\perp$» está definida como: $a \perp b = a^2 + 3^b$. ¿Cuál es el valor de la expresión: $(2 \perp 0) \perp (0 \perp 1)$?

   A) 5

   B) 28

   C) 34

   D) 52

5. Observe la operación que se simboliza con $\ll \perp \gg$, donde $\ll \cdot \gg$ denota el producto habitual de enteros:

$$2 \perp 2 = 2 \cdot 4 = 8,$$

$$3 \perp 2 = 3 \cdot 5 = 15,$$

$$4 \perp 3 = 4 \cdot 7 = 28$$
$$3 \perp 4 = 3 \cdot 7 = 21$$

Entonces, $3 \perp (2 \perp 3)$ es igual a

A) 15

B) 39

C) 42

D) 51

6. ¿Cuántas parejas (x,y) de enteros positivos tales que $2003 < x < y < 2030$ satisfacen la ecuación $y^2 - x^2 = 2x + 1$?

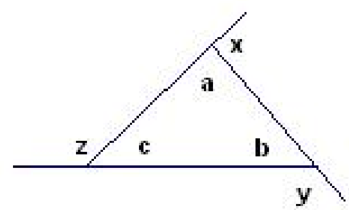
A) 24

B) 25

C) 26

D) 27

7. Si las longitudes exteriores x, y y z de un triángulo están en razón 4:5:6 entonces, la razón en que están los ángulos interiores a, b y c es



A) 1:3:5

B) 3:4:5

C) 3:5:7

D) 4:5:6

8. Si el promedio de tres números es 85 y el promedio de otros dos es 95, entonces el promedio de los cinco números es

A) 88

B) 89

C) 90

D) 91

9. Considere las siguientes afirmaciones:

I. María tiene tres veces la edad de su hijo Juan.
II. Juan es 4 años mayor que su hermano Raúl.
III. La suma de las edades de Juan y María es 48.
IV. Raúl tiene 8 años.

¿Cuál de las proposiciones anteriores son suficientes para poder determinar las edades de Juan y María?

A) I y II

B) I y III

C) II y III

D) II y IV

10. El cuadrado de cualquier número entero positivo «n», es igual a la suma de los números impares menores que su duplo.

Lo anterior se puede expresar como

A) $n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + 2n$

B) $n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$

C) $n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + 2(n - 1)$

D) $n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + 2(n + 1)$

11. Un comandante dispone su tropa formando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres por acomodar. Decide poner una fila más y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado y se da cuenta que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado. Entonces podemos afirmar que en la tropa hay un total de

A) 3061 hombres

B) 55 hombres

C) 3025 hombres

D) 2004 hombres

12. A una pareja se le aplica la operación «ecualizadora» que transforma la pareja (a,b) en la pareja

$$\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right)$$

Si comenzamos con la pareja (2048,1024), de las siguientes parejas NO se podrá obtener después de aplicar varias veces la operación, el par ordenado

A) (1664,1408)

B) (1540,1532)

C) (1539,1531)

D) (1792,1280)

13. Sean b, p, q, x, y, z números naturales con $b \neq 0$ y tales que $p = b^x$, $q = b^y$, $b^4 = (p^y q^x)^z$, entonces el producto xyz es igual a

A) 4

B) 3

C) 2

D) 1

14. Si la expresión $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ se puede descomponer en dos factores cuya suma es igual a $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, entonces esos factores son

A) $1+\frac{b}{a}$ y $\frac{a-b}{ab}$

B) $\frac{b-a}{a}$ y $\frac{a-b}{b}$

C) $\frac{a+b}{a}$ y $\frac{a-b}{b}$

D) $\frac{a+b}{b}$ y $\frac{a-b}{a}$

15. Sean $a,\ b,\ m$ números reales con $a+m\neq 0$. La condición que debe cumplirse para se verifique la igualdad

$$\frac{a^2-m^2+2ab+b^2}{a^2-m^2+ab+mb}=\frac{a+b+m}{a+m}$$

es que

A) $a+b-m\neq 0$

B) $a-b-m=0$

C) $a-b+m\neq 0$

D) $a+b+m=0$

16. Si $a,\ b,\ c$ son números tales que $a+b=2c$, entonces el valor de la expresión

$$\left[\frac{(2^{a-b})^b(2^{b-c})^{c-a}}{(2^{c+b})^{c-b}}\right]^{\frac{1}{c}}$$

es

A) 1

B) 2

C) 4

D) 8

17. Sea $y=a+\frac{b}{x}$, $x\neq 0$, con $a\ y\ b$ constantes. Si $y=1$ cuando $x=-1$ y $y=5$ cuando $x=-5$, entonces $a+b$ es igual a

A) -1

B) 0

C) 11

D) 10

18. Sea $n\in N$, $n>1$. Un número real equivalente a

$$\sqrt[n]{\frac{12^n(4^n+1)}{8^n\cdot 3^n+6^n}}$$

es

A) $\sqrt[n]{4}$

B) 2

C) $\sqrt[n]{\frac{2}{3}}$

D) 3

19. Si $(1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{m})$=1, entonces m es igual a

A) $n-1$

B) $n+1$

C) $2n$

D) $\sqrt{n^2+1}$

20. Si A y B son números naturales tales que

$$\frac{A}{7}+\frac{B}{5}=\frac{31}{35}$$

entonces A es igual a

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

21. Si n es un número real, entonces el sistema simultáneo de 3x3 NO tiene solución si y solo si n es igual a

A) -1

B) 0

C) 1

D) 0 o 1

E) $\frac{1}{2}$

22. La fracción $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ es igual a

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B) 1

C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{4}{3}$

E) $\frac{16}{9}$

23. El conjunto de solución de la inecuación

$$|x-1|+|x+2|<5$$

es

A) $\{x:-3<x<2\}$

B) $\{x:-1<x<2\}$

C) $\{x:-2<x<1\}$

D) $\{x : \frac{-3}{2} < x < \frac{7}{2}\}$

E) $\emptyset$ (vacío)

24. ¿Cuál es el residuo cuando $x^{51} + 51$ es dividido por $x + 1$?

A) 0

B) 49

C) 50

D) 51

E) 52

25. Para todo número real *x* y *y* definido como:

$$x * y = \frac{x \cdot y}{x + y}$$

entonces

A) $*$ es conmutativa pero no asociativa

B) $*$ es asociativa pero no conmutativa

C) $*$ no es ni conmutativa ni asociativa

D) $*$ es conmutativa y asociativa

E) ninguna de estas

26. ¿Cuál es el menor valor entero de **k** tal que

$$2x(kx - 4) - x^2 + 6 = 0$$

no tenga raíces reales?

A) -1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

27. Si $g(x) = 1 - x^2$ y $f\,[g(x)] = \frac{1-x^2}{x^2}$, con $x \neq 0$, entonces $f(\frac{1}{2})$ es igual a

A) $\frac{3}{4}$

B) 1

C) 3

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

E) $\sqrt{2}$

Preguntas de Desarrollo

1. $\forall x, y > 0$. ¿Cuándo se da la igualdad x=y?

2. $\forall x, y > 0$. Probar que: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

3. $\forall x, y, z \in R$. Probar que: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$

4. $\forall x, y, z \in R^+$. Probar que: $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$

5. Mostrar que los lados a,b y c de un triángulo cumple que: $|a - b| < c$.

6. Mostrar que los lados a,b y c de un triángulo cumple que: $c < \frac{a+b+c}{2}$.

7. De un triángulo rectángulo me dicen que su área es $\frac{1}{4}$ del cuadrado de la hipotenusa. Demostrar en ese caso que el triángulo es isósceles.

8. Encuentre el valor de n para el cual
$$3^{2009} - 3^{2008} + 3^{2007} - 3^{2006} = n(3^{2006})$$

9. José ha vivido $\frac{1}{6}$ de su vida como niño, $\frac{1}{8}$ de su vida como joven, $\frac{1}{2}$ de su vida como adulto y 15 años como adulto mayor. ¿Qué edad tiene José?

10. Encuentre todos los valores reales de **x** para los que
$$(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$$

11. Encuentre todos los valores de B y C tales que
$$x^2 + Bx + C = 0$$
tengan raíces B y C distintas.

12. ¿Cuál es la suma de los dígitos de la forma decimal del producto: $2^{2004} \cdot 5^{2006}$?

13. Encuentre todos los valores reales de **x** tales que
$$\sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} = x$$

14. Tome dos números cuya suma sea 1. ¿Qué es mayor, el cuadrado del número más pequeño sumado con el número mayor o el cuadrado del número mayor sumado con al número menor?

15. Encuentre «**a**» dado que 5 es el residuo cuando $x^4 - 2x^3 + ax^2 - x - 1$ es dividido por $x + 2$.

16. Halle tres números consecutivos en los que el cuadrado del número del medio sea mayor en una unidad al producto de los dos restantes.

17. Al multiplicar dos números se obtiene 720 como resultado y al dividir el mayor entre el menor el cociente y el residuo son iguales a 3. ¿Cuáles son esos dos números?

18. Si el perímetro de una sala rectangular es 56m. Si el largo se disminuye en 2m y el ancho aumenta 2m, la sala se hace cuadrada. ¿Cuáles son las dimensiones de la sala?

19. Si a cierto número se le resta 7 y el resultado se multiplicapor 7, se obtiene lo mismo que si al número se le resta 5 y se multiplica por 5. ¿Cuál es ese número?

20. La diferencia de dos números enteros es 14. Si el menor de ellos es igual a la cuarta parte del triple del mayor, ¿cuál es el número mayor?

21. Determine el residuo de la siguiente división:

$$\frac{3x^{100} + 4x^{65} - 3x^{26} + 2x^7 - 6}{x + 1}$$

22. La suma de dos números es 28 y el producto de ellos es 7. Encuentre la suma de los recíprocos de estos números.

23. Carlos tiene 6 años más que Julio. Hace 4 años la edad de Carlos era el doble de la edad que tenía Julio. ¿Cuántos años tiene Carlos?

24. Sean **a**, **b**, y **c** números positivos tales que su producto es 1120 y

$$\frac{2}{a} = \frac{7}{b} = \frac{10}{c}$$

¿Cuánto vale **a**?

25. María sabe que las edades de tres de sus tíos corresponden a tres números impares consecutivos que suman 129. ¿Qué edad tiene el mayor de ellos?

Bibliografía

[1] Calendario CIEMAC 2006. Escuela de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

[2] Cien Problemas de Matemáticas: combinatoria, álgebra, geometría. Instituto de Ciencias de la Educación.Universidad de Valladolid. Francisco Bellot Rosado, Maria Ascención López Chamorro, 1994.

[3] La Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana y Academia de la Investigación Científica, A.C.

[4] La Prueba de Aptitud Académica. Proceso de Admisión 2004-2005. Universidad de Costa Rica.

[5] Problemas de Preparación para las Olimpíadas Costarricenses de Matemática. Editorial UNED.

[6] The Contest Problem Book IV. Annual High School Examinations, 1973-1982 of The Mathematical Association of America.

[7] The Contest Problem Book V. American High School Mathematics Examinations and American Invitational Mathematics Examinations, 1983-1988.

[8] Vivas, Arache. Test de Lógica e Inteligencia.