

Sociedad Ramamsem

Problemas de Matemática para

Competencias olímpicas

Elaborado por :

Miguel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

IV TRIMESTRE DEL 2007

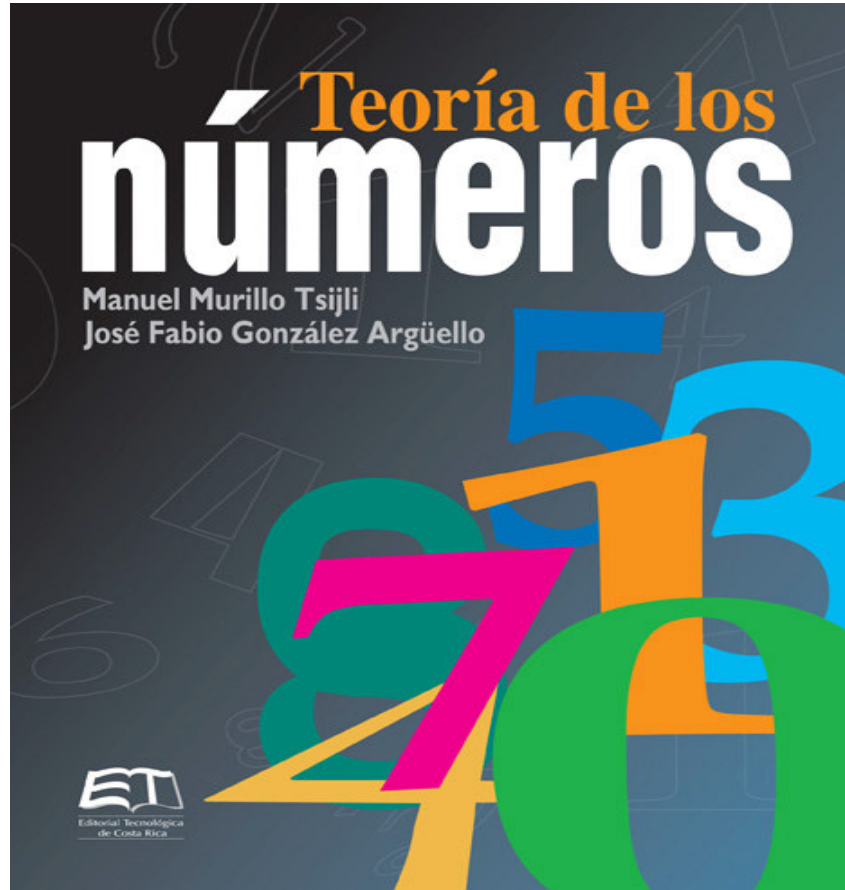
CONTENIDO

	Página
1. Presentación	1
2. Solución a los anteriores Problemas de Competencias no Olímpicas	6
3. Problemas de Competencias no Olímpicas	24
4. <i>CURIOSATO</i>	31
5. Solución al <i>CURIOSATO</i>	39
6. Solución a los problemas anteriores de la columna “Olimpiadas alrededor del mundo”.	40
7. Olimpiadas alrededor del mundo	50
8. Lógica y Matemática Recreativa	53

1. Presentación.

Esta publicación es realizada por la Sociedad RAMAMSEM y va dirigida a todas aquellas personas que deseen explorar una matemática diferente a la que se enseña en secundaria, y algo más !

En esta edición queremos recomendar el siguiente libro:



La manera en que vienen expuestos los contenidos, ejemplos, ejercicios y sus soluciones hace del libro una amena herramienta que permitirá al docente y estudiantes adentrarse en este fascinante mundo de la Teoría de Números y adquirir los conocimientos que le permitirán anticipar el camino a recorrer en la solución de ejercicios desde una nueva óptica.

Como lo indica la introducción de este valiosísimo recurso didáctico: "Esta obra está dirigida a todas aquellas personas que encuentran en las matemáticas el lenguaje universal con

el cual se pueden explicar los fenómenos en nuestro entorno y, por supuesto, a todos los que ven en ella una puerta que los llevará hacia la búsqueda del conocimiento orientado al desarrollo científico y tecnológico.

Contiene los temas que habitualmente se imparten en los cursos iniciales e intermedios de teoría de números, como base para una formación académica sólida. Su objetivo principal es presentar los contenidos de forma rigurosa y atractiva; para ello, se desarrollan más de 200 ejemplos y se proponen cerca de 500 ejercicios, gran parte de ellos con solución.

La Editorial Tecnológica de Costa Rica entrega a la comunidad esta obra, con la seguridad que representa un valioso aporte para todas aquellas personas que aceptan retos, que desean asimilar y aplicar los conocimientos, y sobre todo, para las que disfrutan de la alegría del descubrimiento.”

No está demás, estimable lector, anunciarle que tendremos algunos cambios en los contenidos de esta revista. Estos cambios serán realidad a partir del próximo año y esperamos sus comentarios al respecto de modo que nos permitan crecer y ofrecerles, en cada publicación, una herramienta más dinámica, flexible y actualizada que le permita a usted y con quienes comparte este material ir adquiriendo una sólida formación matemática.

Toda comunicación o información con respecto a los problemas propuestos o soluciones, pueden ser enviados a



ramamsem@latinmail.com o bien ramamsem@costarricense.cr

Para finalizar con esta introducción, reproducimos un artículo publicado en la página 15 del periódico La Nación el 20 de diciembre del 2007 referente a las Olimpiadas de Matemáticas expuesto por el Dr. Víctor Buján. Empecemos a fortalecernos en nuestro campo de trabajo para

poder darle a nuestra patria y sociedad lo que exigen y merecen de nosotros como profesionales de la Matemática.



PÁGINA QUINCE
VÍCTOR M. BUJÁN | vbujan@gmail.com

Olimpiadas de Matemática

La derrota del *pobrecito* , del facilismo, del miedo, la pereza y los prejuicios. Vengo a estas páginas a confesar públicamente uno de mis pecados más negros. Me acuso de ser el principal instigador de una actividad que ha venido reuniendo sin interrupción, durante 15 largos años, a centenares de niños y niñas inocentes de cuarto, quinto y sexto grado (los del llamado segundo ciclo de la Educación General Básica), para que se entreguen durante tres horas de las mañanas de tres sábados del año a una actividad que algunos considerarán gravemente perjudicial para mis tiernas víctimas: ¡una olimpiada de matemática! Para más señas, se trata de la Olimpiada Matemática Costarricense para la Educación Primaria (OMCEP), uno de los programas de la Agrupación de Consultores para la Atención y Promoción del Talento (ACAPTA).

He perpetrado estos actos a sabiendas de que vivimos en el país del *pobrecito* , en el cual no faltará uno que otro padre de familia, educador o psicólogo convencido de que la responsabilidad, el estudio serio y el esfuerzo perjudican a los niños y a las niñas. Por otra parte, algunos de mis compatriotas hablan como si tuvieran la seguridad de que la matemática

fue inventada en la antigüedad como instrumento de tortura para atormentar a los pobrecitos alumnos.

Sin propósito de enmienda. Pero mi confesión no viene acompañada de propósito de enmienda. Pocas cosas me hacen tan feliz como pertenecer al grupo de las personas que convierten a la matemática en una competencia deportiva que muchos niños cultivan con deleite y, muchas veces, con pasión. Es el mismo deleite y la misma pasión que anima a los que toman parte en los deportes para aficionados como un cuadrangular de fútbol, como un campeonato de tenis o como una competencia de natación entre clubes.

Aquí el concepto de *deporte* es fundamental. No podremos comprender en qué consiste una olimpiada de matemática como esta si no logramos entender que se trata de una actividad que los niños escogen libremente venir a disfrutarla, a deleitarse, y no podremos comprenderlo si no alcanzamos a entender que los cuestionarios de olimpiada no tienen nada que ver con los exámenes de matemática. Podemos extender la idea de olimpiadas matemáticas como deporte hasta llegar a comparaciones curiosas: por ejemplo, nunca he oído a nadie llamar *pobrecita* a Claudia Poll porque ella se levanta tempranísimo de madrugada para nadar y nadar centenares o miles de metros, pero cuando hablo de niños y niñas que se acuestan tarde estudiando matemática en preparación para la OMCEP, a veces mi interlocutor me mira como se mira a un sádico que gozara aplicando suplicios a menores de edad.

Beneficio social. Ironías aparte, la extraordinaria importancia y el gran beneficio social de las olimpiadas matemáticas son perfectamente comprensibles si nos tomamos en serio el hecho de que vivimos en la era del conocimiento, en la cual la preparación matemática es cada día más importante.

Pensemos que toda nación en el siglo XXI necesita contar con un programa de estudios de matemática robusto para la totalidad de sus estudiantes, el cual constituye una condición necesaria para el progreso espiritual y material de la sociedad. Observemos también que esto es necesario pero que no es suficiente. Porque, además, el país debe contar también con otro plan de estudios para identificar y para dar oportunidades a sus estudiantes más brillantes y entusiastas de la matemática, con el propósito de brindarles la atención y los servicios educativos que necesitan.

Olimpiadas de matemática como OMCEP, como OLCOMA, como la Iberoamericana de la OEI, como las internacionales y otras, son contribuciones de gran valor a este segundo programa.

Afortunadamente, existen padres y madres de familia seguros de que cuantas más aficiones deseables sean sembradas en el alma de sus niños, menos probable será que sus niños adquieran aficiones indeseables. Y la afición a la resolución deportiva de problemas de matemática es algo que acompañará a nuestros hijos e hijas hasta sus últimos días y los situará en posiciones de ventaja en los estudios y en el ejercicio de sus profesiones.

Pero todavía existe en Costa Rica una gran dosis de incompreensión y de falta de información sobre la naturaleza y sobre el impacto social de las olimpiadas matemáticas, entre cuyos objetivos están:

- 1- Estimular el estudio de la matemática a nivel nacional.
- 2- Contribuir a la identificación y al desarrollo vocacional de niños talentosos en matemática.
- 3- Elevar la conciencia del público costarricense acerca de la importancia de la matemática.
- 4- Elevar el nivel de prestigio asociado con el aprovechamiento en matemática en la educación primaria. Esto lo pueden comprender solamente las personas que rechazan aquella estupidez tan popular en Costa Rica de que la responsabilidad, el esfuerzo y el estudio serio roban a los niños las alegrías de la infancia.

¿Nerdos? Una última palabra para aquellos que gustan de sostener que los niños y las niñas que participan en la OMCEP son nerdos: corran a explicarles a sus hijos que deben tratar amablemente a esos *nerdos* y procurar hacerse amigos de ellos, porque probablemente un día ellos serán quienes darán trabajo a los hijos de ustedes.

2. Solución a los anteriores Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

A continuación brindamos la solución de los 30 ejercicios propuestos en la columna **Problemas de Competencias no Olímpicas** de la edición anterior.

Les recordamos que la forma de resolver cada ejercicio no necesariamente es la única, así que invitamos al estimable lector a enviarnos sus soluciones a los mismos.

ÁLGEBRA.

1. Si r_1, r_2, r_3, r_4 son las raíces de $2x^4 - 3x^2 - 14x + 17 = 0$ determine el valor numérico de

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2.$$

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN:

No trataremos de resolver la ecuación para hallar las raíces. El truco está en realizar lo siguiente: Como r_1, r_2, r_3, r_4 son las raíces de $2x^4 - 3x^2 - 14x + 17 = 0$ entonces

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

multiplicando en el miembro izquierdo y aplicando identidad polinómica obtenemos $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = a$, $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = b$. La identidad polinómica es una herramienta muy útil que se aplica en distintos concursos de matemática, también podría haberse aplicado las fórmulas de Viêta. En este problema, después de dividir por 2 se obtiene la

ecuación mónica $x^4 + 0x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 7x + \frac{17}{2} = 0$, con lo que:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) = 0 - 2 \cdot \frac{-3}{2} = 3.$$

2. Determine el valor de: $\log_2 [\text{sen}(6^\circ) \text{sen}(42^\circ) \text{sen}(45^\circ) \text{sen}(66^\circ) \text{sen}(78^\circ)]$.

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN:

Al aplicar las identidades trigonométricas $\text{sen}(90^\circ - x) = \text{sen } x$, $\text{sen}(90^\circ + x) = \text{cos } x$ y $\text{sen } 2x = 2 \text{sen } x \text{cos } x$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{sen}(6^\circ) \text{sen}(42^\circ) \text{sen}(66^\circ) \text{sen}(78^\circ) &= \text{sen}(6^\circ) \text{cos}(90^\circ - 42^\circ) \text{cos}(90^\circ - 66^\circ) \text{cos}(90^\circ - 78^\circ) \\ &= \text{sen}(6^\circ) \text{cos}(48^\circ) \text{cos}(24^\circ) \text{cos}(12^\circ) \\ &= \frac{2 \text{sen}(6^\circ) \text{cos}(6^\circ)}{2 \text{cos}(6^\circ)} \text{cos}(12^\circ) \text{cos}(24^\circ) \text{cos}(48^\circ) \\ &= \frac{\text{sen}(12^\circ)}{2 \text{cos}(6^\circ)} \text{cos}(12^\circ) \text{cos}(24^\circ) \text{cos}(48^\circ) \\ &= \frac{\text{sen}(24^\circ)}{2^2 \text{cos}(6^\circ)} \text{cos}(24^\circ) \text{cos}(48^\circ) \\ &= \frac{\text{sen}(48^\circ)}{2^3 \text{cos}(6^\circ)} \text{cos}(48^\circ) \\ &= \frac{\text{sen}(96^\circ)}{2^4 \text{cos}(6^\circ)} = \frac{\text{cos}(6^\circ)}{2^4 \text{cos}(6^\circ)} = \frac{1}{2^4} \end{aligned}$$

por otro lado, $\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{2^{0.5}}$, con lo que el producto del argumento del logaritmo es igual a $2^{-4.5}$, finalmente, el logaritmo buscado equivale a $\log_2 2^{-4.5} = -4.5$.

3. Sea la operación $*$ definida por $a * b = a^2 + 3^b$. Determine el valor de $(2 * 0) * (0 * 1)$.
(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

SOLUCIÓN:

$$(2 * 0) * (0 * 1) = (2^2 + 3^0) * (0^2 + 3^1) = 5 * 3 = 5^2 + 3^3 = 25 + 27 = 52.$$

4. Si $x + \frac{1}{x} = 2$, entonces determine el valor numérico de $x^6 + \frac{1}{x^6}$.

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN:

Una manera de resolver este problema sería resolver la ecuación dada (este camino es sencillo porque así lo permite la ecuación). Nosotros lo resolveremos de la siguiente manera:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4 - 2 = 2.$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2 \cdot 2 - 2 = 2.$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 - 2 = 4 - 2 = 2.$$

5. Las longitudes de los lados de un triángulo son las tres raíces distintas de la ecuación:

$$4x^3 - 24x^2 + 47x - 30 = 0.$$

Determine el área del triángulo.

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN:

Es posible hallar las tres raíces y el área por métodos elementales, utilizaremos un bonito truco para este problema. Si las raíces son r_1, r_2, r_3 , entonces podemos escribir

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - 6x^2 + \frac{47}{4}x - \frac{15}{2},$$

así, obtenemos que el perímetro del triángulo es $r_1 + r_2 + r_3 = -a = 6$ y su semiperímetro $s = 3$.

Sustituyendo este resultado ($s = 3$) en $(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - 6x^2 + \frac{47}{4}x - \frac{15}{2}$, obtenemos

$$(3 - r_1)(3 - r_2)(3 - r_3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + \frac{47}{4} \cdot 3 - \frac{15}{2} = 27 - 54 + \frac{141}{4} - \frac{30}{4} = \frac{-108 + 111}{4} = \frac{3}{4},$$
 al aplicar

la fórmula de Herón para hallar el área buscada se tiene $\sqrt{s(s - r_1)(s - r_2)(s - r_3)} = \sqrt{3 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$.

6. Si $a \neq b$ y $\left(\frac{a(1-b)}{b(1-a)}\right)^2 = 1$, determine el valor de $\frac{a+b}{ab}$.

(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

SOLUCIÓN:

Del enunciado obtenemos las siguientes situaciones:

- $a(1-b) = b(1-a)$, en tal caso $a = b$ lo cual queda excluido por el mismo enunciado.
- $a(1-b) = -b(1-a)$, en tal caso $a+b = 2ab$, así que $\frac{a+b}{ab} = 2$.

7. Si a, b y c denotan las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 8 = 0$, determine el valor de $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$.

(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

SOLUCIÓN:

La expresión cuyo valor debemos determinar es equivalente a $\frac{a+b+c}{abc}$. Como a, b y c denotan las soluciones de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 8 = 0$, tenemos que:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 2x^2 - 5x + 8,$$

de donde $a+b+c = 2$ y $abc = -8$ con lo que $\frac{a+b+c}{abc} = -\frac{1}{4}$.

8. Determine $\left\lfloor \frac{2007! + 2004!}{2006! + 2005!} \right\rfloor$ donde $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x .

(10th Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, 2007)

SOLUCIÓN:

Tenemos que:

$$\left\lfloor \frac{2007! + 2004!}{2006! + 2005!} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2007 \cdot 2006 + \frac{1}{2005}) \cdot 2005!}{(2006 + 1) \cdot 2005!} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2007 \cdot 2006 + \frac{1}{2005}}{2007} \right\rfloor = \left\lfloor 2006 + \frac{1}{2005 \cdot 2007} \right\rfloor.$$

por lo que

$$\left\lfloor \frac{2007! + 2004!}{2006! + 2005!} \right\rfloor = 2006.$$

9. Dos números reales x y y son tales que $x - y = 4$ y $x^3 - y^3 = 28$. Determine el valor de xy .

(10th Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, 2007)

SOLUCIÓN:

Tenemos que $28 = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)\left[(x - y)^2 + 3xy\right]$ de

donde $28 = 4(16 + 3xy)$ con lo cual $xy = -3$.

10. Tres números reales x, y, z son tales que $\frac{x+4}{2} = \frac{y+9}{z-3} = \frac{x+5}{z-5}$. Determine el valor de $\frac{x}{y}$.

(10th Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, 2007)

SOLUCIÓN:

Como la primera y tercera fracción son iguales, sumando, sus numeradores y

denominadores se produce otra fracción igual a las otras: $\frac{x+4+x+5}{2+z-5} = \frac{2x+9}{z-3}$. Entonces,

comparando esta fracción con la segunda fracción dada se tiene $y+9 = 2x+9$ con lo que

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}.$$

GEOMETRÍA.

1. En el triángulo rectángulo ABC, la longitud del cateto AB es 29. Si las otras dos longitudes son enteras positivas y el perímetro del triángulo es divisible por 29, entonces determine el valor de

$$\frac{\text{perímetro del } \Delta ABC}{29}$$

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN:

Llamemos a los otros dos lados por x y y (será la hipotenusa). Entonces

- x y y son ambos positivos.
- $29 + x + y$ es divisible por 29 por lo que $x + y$ también lo es.
- $29^2 + x^2 = y^2$.

Donde quiera que usted mire una ecuación del tipo $29^2 + x^2 = y^2$ en un concurso de matemática, escríbala siempre como una diferencia de cuadrados y factorice, especialmente cuando la pregunta involucre divisibilidad de alguna manera. Así, en este caso $29^2 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$, y siendo 29 un número primo, las únicas maneras de expresar 29^2 como producto de números positivos es $1 \cdot 29^2$ y $29 \cdot 29$. Pero como $y > x$ se tiene que $y - x = 1$ y $y + x = 29^2$. Así, el perímetro es $29 + x + y = 29 + 29^2 = 30 \cdot 29$. Finalmente,

$$\frac{\text{perímetro del } \Delta ABC}{29} = \frac{30 \cdot 29}{29} = 30.$$

2. El diámetro \overline{AB} y la cuerda \overline{CD} se intersecan en el interior del círculo en E. $AE = AC$, y la medida de los ángulos ACB y CBD están en la razón 5 a 4. Determine la medida, en grados, del arco BD.

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN: (Le sugerimos que realice un diagrama que le permita seguir la solución)

Sea $x = \text{arc } BD$ y $y = \text{arc } AC$. Desde que \overline{AB} es un diámetro, $180^\circ - x = \text{arc } AD$ y $180^\circ - y = \text{arc } BC$. Ahora bien, $180^\circ \cdot \frac{4}{5} = \text{arc } CBD = 144^\circ$, con lo que $180^\circ - y + x = 144^\circ$.

También, como $AE = AC$, entonces $\angle ACD \cong \angle AEC$. Por otro lado, la medida de $\angle ACD$ es la mitad de la medida del arco AD y la medida de $\angle AEC$ es la semisuma de los arcos AC y BD,

esto es $\frac{180^\circ - x}{2} = \frac{x + y}{2}$ con lo que $180^\circ = 2x + y$. Resolviendo, para x , el sistema de

ecuaciones obtenido encontramos $x = 48^\circ$.

3. Los triángulos rectángulos AXY y BXY tienen la hipotenusa común XY. Al prolongar AY y BX éstos se intersecan en el punto Z. Si $AX = 1$, $AY = 8$, $BX = 7$ y $BY = 4$, entonces determine el área del triángulo XYZ.

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN: (Trace un dibujo)

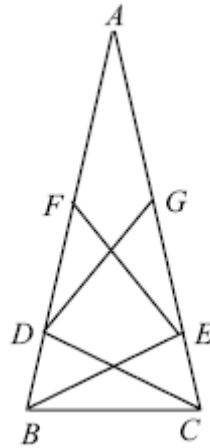
Trace la perpendicular de Z a XY, sea C el punto donde la perpendicular interseca a XY. Los triángulos AXY y CZY son semejantes (ambos son rectángulos y comparten el ángulo en Y); similarmente, los triángulos BXY y CXZ son semejantes. De lo anterior, se tiene que $ZC : AX = CY : AY$ y $ZC : BY = CX : BX$. Pero entonces

$$XY = CX + CY = \frac{ZC \cdot BX}{BY} + \frac{ZC \cdot AY}{AX} = ZC \left(\frac{7}{4} + \frac{8}{1} \right) = ZC \left(\frac{39}{4} \right).$$

Así, el área buscada es $\frac{1}{2} XY \cdot ZC = \frac{1}{2} XY \left(XY \cdot \frac{4}{39} \right) = \frac{2}{39} (XY)^2 = \frac{2}{39} \cdot 65 = \frac{10}{3}$.

Nota: la longitud XY puede determinarse utilizando el teorema de Pitágoras al triángulo AXY.

4. El $\triangle ABC$ es isósceles y $AF = AG = FE = GD = DC = EB = BC$. Determine $m \angle A$.

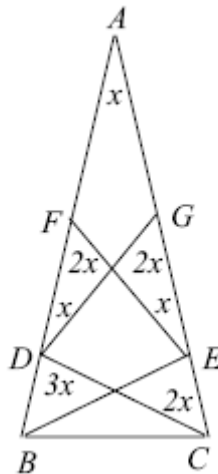


(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

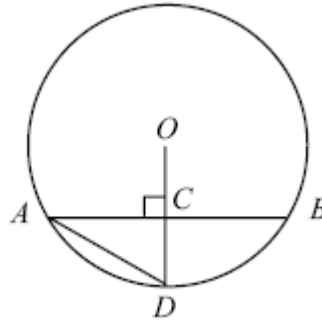
SOLUCIÓN:

Sea $\angle A = x$. Desde que $AF = FE$, $\angle FEA = x$. Por el teorema del ángulo externo, $\angle DFE = x + x = 2x$. Similarmente, $\angle DGC = 2x$. Desde que $DG = DC$, entonces $\angle DCG = 2x$. Como $\angle GDC = 180^\circ - 4x$, se tiene que $\angle BDC = 3x$. Como $DC = BC$, $\angle DBC = 3x$. Como el triángulo ABC es isósceles, $\angle ECB = 3x$ y $\angle A + \angle ABC + \angle ACB = x + 3x + 3x = 7x$, por lo

que $\angle A = \frac{180^\circ}{7}$.



5. O es el centro del círculo que se muestra en la figura siguiente.

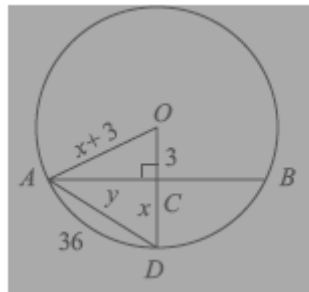


$OC = 3$ y $AD = 36$. Determine la medida de CD .

(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

SOLUCIÓN:

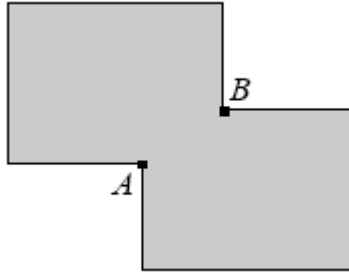
Consideremos la figura siguiente:



con base en ella se tiene que $x^2 + y^2 = 36^2$ y $y^2 + 3^2 = AO^2 = OD^2 = (x + 3)^2$.

Sustituyendo $(x + 3)^2 - 3^2$ por y^2 en la primera ecuación obtenemos $x^2 + 3x - 648 = 0$ que al resolverla nos produce $x=24$. (la otra solución es negativa y, por la naturaleza del ejercicio se elimina)

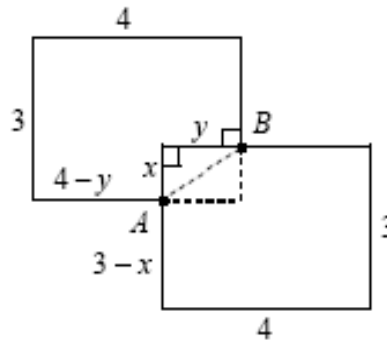
6. Dos rectángulos de 3×4 son superpuestos de tal manera que sus lados son perpendiculares. Si el área y el perímetro del área sombreada son 22 y 20 respectivamente, determine la medida de AB.



(Manhattan Mathematics Contest, 2006)

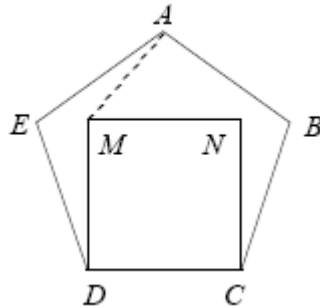
SOLUCIÓN:

Considere la siguiente figura:



El área 22 es igual a $24 - xy$ con lo que $xy = 2$. El perímetro 20 es igual a $16 + 2x + 2y$ con lo que $x + y = 4$. De esta última ecuación obtenemos que $x^2 + 2xy + y^2 = 16$ lo que equivale a $x^2 + 4 + y^2 = 16$ esto es $x^2 + y^2 = 12$ o bien $AB^2 = 12$, finalmente $AB = 2\sqrt{3}$.

7. Si ABCDE es un pentágono regular y MNCD es un cuadrado, determine el valor de $m \angle AMN - m \angle EAM$.



(Manhattan Mathematics Contest, 2006)

SOLUCIÓN 1:

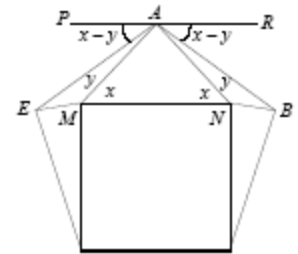
Considere la siguiente figura:

Sea \overrightarrow{PA} una recta paralela a \overline{MN} . Sea $\angle AMN = x$ y $\angle EAM = y$.

Desde que $\angle PAM = \angle AMN = x$, entonces $\angle PAE = x - y$.

Como $\angle RAB = x - y$, entonces $180^\circ = 2(x - y) + 108^\circ$ con lo cual

$$x - y = 36^\circ.$$



SOLUCIÓN 2:

Considere la siguiente figura:

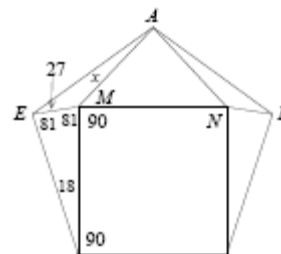
Sea $\angle EAM = x$ y los otros ángulos como están marcados

en la figura. Notemos que $\angle AEM = 27^\circ$. Desde que

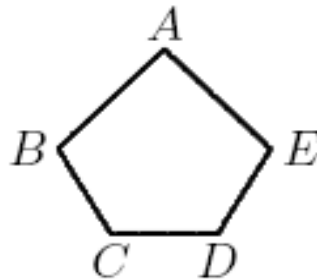
$$\angle EMA = 180^\circ - (27^\circ + x) = 153^\circ - x, \text{ entonces}$$

$$\angle AMN = 360^\circ - (90^\circ + 81^\circ + 153^\circ - x^\circ) = 36^\circ + x.$$

Finalmente, $\angle AMN - \angle EAM = (36^\circ + x) - x = 36^\circ$.



8. El pentágono ABCDE tiene un ángulo recto en A, $AB = AE$, y $ED = DC = CB = 1$. Si $BE = 2$ y es paralelo a CD, determine el área del pentágono.

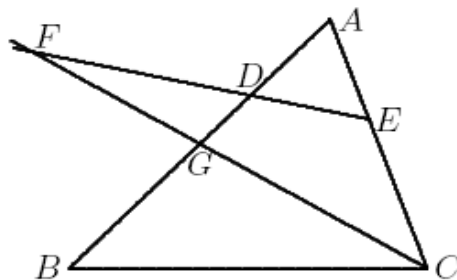


(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

SOLUCIÓN:

El triángulo rectángulo ABE tiene área 1. La altura del trapecio isósceles es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (que puede ser hallada mediante el teorema de Pitágoras) por lo que el área del cuadrilátero BEDC es $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ y, entonces, el área del pentágono es $1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

9. En la siguiente figura, $AD = AE$, y F es la intersección de la prolongación de ED con la bisectriz del ángulo C. Si $\angle B = 40^\circ$, determine la medida del ángulo $\angle CFE$.

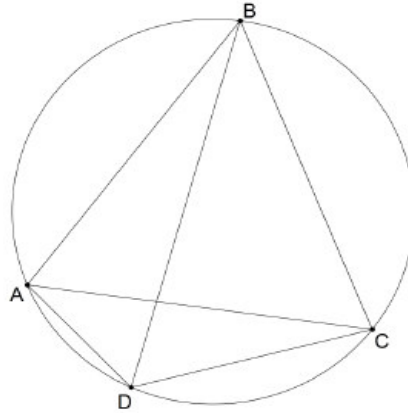


(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

SOLUCIÓN:

Sean x la medida del ángulo buscado, y la medida de los ángulos de la base del triángulo isósceles ADE y z los ángulos medios del ángulo C. Al compartir el ángulo en A los triángulos ADE y ABC se tiene que $2y = 2z + 40^\circ$. Similarmente, con los triángulos DFG y BCG se tiene $x + y = 40 + z$ con lo que $x = 20^\circ$.

10. El cuadrilátero convexo ABCD tiene longitudes $AB = BC = 7$, $CD = 5$, y $AD = 3$. Además, $m\angle ABC = 60^\circ$, determine BD.



(10th Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, 2007)

SOLUCIÓN:

El triángulo ABC es equilátero, así $AC = 7$. Ahora bien, el ángulo CDA subtiende el arco ABC por lo que $\angle CDA = 120^\circ$, aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrángulo concíclico ABCD tenemos $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, simplificando obtenemos $BD = CD + AD = 8$.

TEORÍA DE NÚMEROS.

1. ¿ Cuántos números enteros con cuatro diferentes dígitos entre 1000 y 9999 son tales que el valor absoluto de la diferencia del primer dígito y el ultimo es 2 ?

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN:

Necesitamos contar el número de posibilidades para el primer y el último dígito. Para que el último dígito sea dos unidades mayor que el primero tenemos siete maneras diferentes: 1xx3, 2xx4, 3xx5, 4xx6, 5xx7, 6xx8, 7xx9. Para que el último dígito sea dos unidades menor que el primero tenemos ocho posibilidades: 2xx0, 3xx1, 4xx2, 5xx3, 6xx4, 7xx5, 8xx6, 9xx7 (la asimetría se da porque el cero no puede ser el primer dígito). En total tenemos 15 formas diferentes para obtener que el valor absoluto de la diferencia del primer dígito y el ultimo es 2. Por otro lado, para cada situación planteada con el primer y último dígito se tienen ocho dígitos para seleccionar dos diferentes de ellos. Esto es, tenemos $8 \cdot 7 = 56$ maneras para seleccionar el segundo y tercer dígito. Así, el total de números buscados que satisfacen las condiciones del enunciado son $15 \cdot 56 = 840$.

2. Si cada uno de los cuatro números es sumado al promedio de los otros tres, las respectivas sumas son 10, 16, 30 y 36. Calcule el valor de los cuatro números y lístelos en orden ascendente.

(Polya Mathematics Competition, Education Program for Gifted Youth, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN:

Sean a, b, c, d los números buscados, entonces $a + \frac{b+c+d}{3} = 10$, $b + \frac{a+c+d}{3} = 16$,

$c + \frac{a+b+d}{3} = 30$, $d + \frac{a+b+c}{3} = 36$. Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos

$a = -8$, $b = 1$, $c = 22$, $d = 31$.

3. Determine todas las posibles parejas de enteros positivos (m, n) , $m < n$, para los cuales

$$m + (m + 1) + (m + 2) + \dots + n = 54$$

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994)

SOLUCIÓN:

Debe ser conocido que $m + (m + 1) + \dots + n = \frac{(m + n)(n - m + 1)}{2}$. De lo anterior, se deduce

que $(m + n)(n - m + 1) = 108$. Ambos términos en el producto del miembro izquierdo de la ecuación anterior son positivos y $m + n > n - m + 1$, notemos que las posibles descomposiciones de 108 en dos factores son: $108 \cdot 1$, $54 \cdot 2$, $36 \cdot 3$, $27 \cdot 4$, $18 \cdot 6$ y $12 \cdot 9$. Por otro lado, $m + n$ y $n - m + 1$ tienen diferente paridad (esto es, uno de ellos es par y el otro impar; lo cual se puede verificar realizando la diferencia entre ellos y obteniendo un número impar). Por las consideraciones anteriores tenemos los sistemas de ecuaciones $m + n = 108$ y $n - m + 1 = 1$, $m + n = 36$ y $n - m + 1 = 3$, $m + n = 12$ y $n - m + 1 = 9$, $m + n = 27$ y $n - m + 1 = 4$, que al resolverlos nos producen las soluciones $(54, 54)$, que debe descartarse de acuerdo al enunciado, $(17, 19)$, $(2, 10)$ y $(12, 15)$.

4. Determine todos los números primos de dos dígitos tales que la suma de sus dígitos es también un número primo de dos dígitos.

(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

SOLUCIÓN:

Este ejercicio puede ser resuelto por ensayo y error, así obtenemos los números:

$$29, 47, 67, 83, 89$$

5. Si $AB_7 = BA_5$, con A y B diferentes de cero, determine todas las parejas ordenadas (A, B) que satisfacen las condiciones enunciadas.

(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

SOLUCIÓN:

Del enunciado obtenemos $7A + B = 5B + A \Rightarrow 6A = 4B \Rightarrow A = \frac{2}{3}B$, la única posibilidad es

que $B = 3, A = 2$. La respuesta es $(2, 3)$.

FUNCIONES O SUCESIONES.

1. Sea f una función tal que $f(x) = x f(x - 1)$ para todo x y $f(3)$ es la media aritmética entre $f(2)$ y $f(4)$. Determine el valor exacto de $\ln\left(5e^{f(3)}\right)$.

(New England Association of Mathematics Leagues, New England Playoffs, 2003)

SOLUCIÓN:

Como $f(3) = 3f(2)$ y $f(4) = 4f(3)$, entonces $f(3) = \frac{f(2) + f(4)}{2} = \frac{\frac{1}{3}f(2) + 4f(3)}{2}$. Así,
 $f(3) = \frac{13}{6}f(2) \Rightarrow f(3) = 0$. Finalmente, $\ln\left(5e^{f(3)}\right) = \ln 5$.

2. Sea f una función cuadrática con discriminante 4. Uno de los ceros (raíces de $f(x) = 0$) de la función es 6 y $f(0) = 6$. Determine todas las funciones caracterizadas por la información dada.

(New England Association of Mathematics Leagues, New England Playoffs, 1973)

SOLUCIÓN:

Siendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ y desde $f(0) = 6$ tenemos que $c = 6$. Por otro lado, como $f(6) = 0$ se tiene que $36a + 6b + 6 = 0 \Rightarrow b = -6a - 1$ (1). Además, como su discriminante es 4 se tiene $b^2 - 4ac = 4 \Rightarrow (-6a - 1)^2 - 24a = 4 \Rightarrow 36a^2 + 12a + 1 - 24a = 4$ que es equivalente a $(6a - 1)^2 = 4$ y que, al resolverla, nos produce $a = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{6}$ para obtener los valores $b = -4$, $b = 0$ dando como resultado que las funciones buscadas corresponden a $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ y $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 6$.

3. Iniciando con $q_1 = 2x^2 - 6x + 3$, una sucesión de expresiones cuadráticas se forma de modo que los ceros de q_n son el doble de los ceros de q_{n-1} para $n \geq 2$. Si $q_7 = x^2 - bx + c$, determine (b, c) .

(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

SOLUCIÓN:

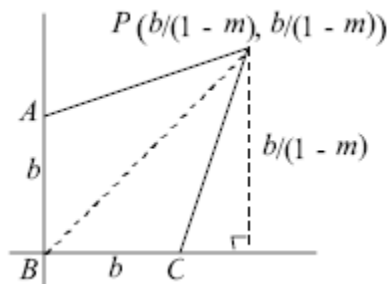
Comparando el producto $(x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + mn$ con el siguiente producto $(x - 2m)(x - 2n) = x^2 - 2(m + n)x + 4mn$ podemos notar que cada vez que obtenemos una nueva expresión cuadrática definida en el enunciado la suma de sus el doble mientras que su producto se cuadruplica. Así, en q_7 tenemos $b = 3 \cdot 2^6 = 192$ y $c = \frac{3}{2} \cdot 4^6 = 6144$ por lo que la respuesta es $(192, 6144)$.

4. Sea R la región del primer cuadrante encerrada por los ejes X e Y y las gráficas de $f(x) = \frac{9}{25}x + b$ y $f^{-1}(x)$. Si el área de R es 49, determine el valor de b .

(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

SOLUCIÓN:

Consideremos la siguiente figura:



Si $f(x) = mx + b$, entonces $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{m}$ y el punto de intersección de ambas rectas está

dado por $\left(\frac{b}{1-m}, \frac{b}{1-m}\right)$. La región R puede ser separada en dos triángulos congruentes PAB

y PCB ambos con base b y altura, sobre dicha base, $\frac{b}{1-m}$. El área de R es:

$$2\left(\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{b}{1-m}\right) = \frac{b^2}{1-m} = 49.$$

Para $m = \frac{9}{25}$ tenemos $b^2 = \frac{16}{25} \cdot 49 \Rightarrow b = \frac{28}{5}$.

5. Sea $a_1 = 20$ y $a_2 = 3$. Para $n \geq 1$, se define $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Determine el residuo cuando $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2003}^2$ es dividido por 8.

(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2003)

SOLUCIÓN:

El valor de a^2 en módulo 8 depende solamente del valor de a en módulo 4. Los valores en módulo 4 de los sucesivos a_i son 0, 3, 3, 2, 1, 3 y esta secuencia de seis números se repite periódicamente. El valor de la suma, en módulo 8, de los cuadrados en este bloque de seis números es $0 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 = 0$. Luego, 2003 tiene 333 de estos bloques y los siguientes cinco números tiene por suma $0 + 1 + 1 + 4 + 1 = 7$. Por tanto, el residuo es 7.

3. Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna consistirá en 30 ejercicios propuestos que se separarán por categorías (Álgebra, Geometría, Teoría de Números y Funciones o Sucesiones) y de menor a mayor nivel de dificultad. Es importante destacar que el **nivel de dificultad** en que se ordenarán los ejercicios de cada categoría es valorado por nosotros (los editores) de acuerdo a criterios establecidos pero ello no significa que esta valoración pueda ser diferente para el estimable lector.

Por otro lado, la solución de los mismos se presentará hasta la próxima edición con la finalidad de que nuestros lectores participen activamente enviándonos soluciones y / o comentarios que puedan enriquecer la discusión de cada ejercicio. Sin embargo, de no darse esa participación en algunos ejercicios, se publicará, al menos, una solución oficial brindada por los encargados de esta sección.

ÁLGEBRA.

1) Sea $D = a^2 + b^2 + c^2$ donde a y b son enteros consecutivos y $c = ab$. Pruebe que \sqrt{D} siempre es un entero impar.

(Examen del nivel Senior, Torneo de Matemática Furman University Wylie, 1997)

2) Pruebe que $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6}$.

(Material de preparación para la competencia olímpica del nivel Junior del Reino Unido, 2006)

3) Sea a un número tal que $0 < a \leq 1$ y $a^{2001} - 2a + 1 = 0$. Determine todos los posibles valores de la suma $1 + a + a^2 + \dots + a^{2000}$.

(XX Concurso de Matemática de Secundaria de Lehigh University / AT&T, 2000)

4) Determine el valor de la suma

$$\frac{1}{\log_2(100!)} + \frac{1}{\log_3(100!)} + \frac{1}{\log_4(100!)} + \dots + \frac{1}{\log_{100}(100!)}$$

(Concurso de Matemática de la Universidad de Carolina del Sur, Diciembre, 1997)

5) Determine todas las soluciones de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} = x^2 + 5x + 5.$$

(Concurso de Matemática de la Universidad Kettering para estudiantes de Secundaria, 2001)

6) Resuelva la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\log_3 1994} + \frac{1}{\log_6 1994} + \frac{1}{\log_9 1994} + \frac{1}{\log_{12} 1994} = \frac{1}{\log_{(3X)} 1994}.$$

(Competición Polya de Matemática, Universidad de Stanford, 1994)

7) Determine todos los valores de x para los cuales $2 \log_4(x) + \log_2(x - 2) = 3$.

(Competición Polya de Matemática, Universidad de Stanford, 1994)

8) Si $f(x)$ es un polinomio mónico de grado cuatro tal que $f(-1) = -1$, $f(2) = -4$, $f(-3) = -9$, y $f(4) = -16$, determine $f(1)$.

(Torneo de Matemática de Harvard-MIT, Febrero 1999)

9) El polinomio cuadrático $P(x)$ tiene las siguientes propiedades: $P(x) \geq 0$ para todo número real x , $P(1) = 0$, y $P(2) = 2$. Determine el valor de $P(0) + P(4)$.

(Concurso de Matemática de la Universidad de Carolina del Sur, Diciembre, 1997)

10) Demuestre que el número de 4012 dígitos:

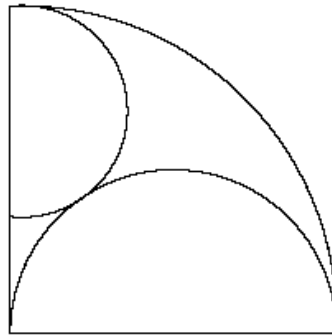
$$n = \underbrace{11 \dots 1}_{2005} \underbrace{22 \dots 2}_{2006} 5.$$

es un cuadrado perfecto.

(Material de preparación para la competencia olímpica del nivel Senior del Reino Unido, 2006)

GEOMETRÍA.

1. La siguiente figura muestra un cuadrante de radio 2 en el cual está inscrito un semicírculo de radio uno. Un semicírculo menor también inscrito, como lo muestra la figura, es tangente al semicírculo de radio uno. Determine la medida del radio del semicírculo menor.

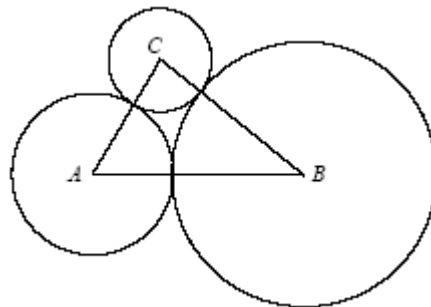


(Examen del nivel Senior, Torneo de Matemática Furman University Wylie, 1997)

2. Las longitudes de los lados de un triángulo son 6, 7 y x . Determine el mayor valor que puede tomar el área de dicho triángulo.

(XX Concurso de Matemática de Secundaria de Lehigh University / AT&T, 2000)

3. Tres círculos, centrados en A , B y C , son tangentes exteriormente uno a otro. El círculo con centro en A tiene radio 3. El círculo con centro en B tiene radio 5. La medida de $\angle BAC$ es $\frac{\pi}{3}$ radianes, determine la medida de $\angle ABC$ en radianes.



(Concurso de Matemática de la Universidad de Carolina del Sur, Diciembre, 1997)

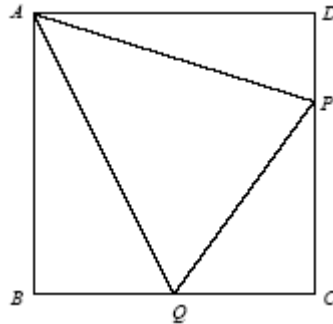
4. Sea r el radio del círculo inscrito del triángulo ABC . Tome un punto D sobre el lado BC , y sean r_1 y r_2 los inradios de los triángulos ABD y ACD . Pruebe que r , r_1 y r_2 pueden ser siempre las longitudes de los lados de un triángulo.

(Torneo de Matemática de Harvard-MIT, Febrero 1999)

5. Sea C un círculo en donde dos diámetros se intersecan en un ángulo de 30° . Un círculo S es tangente a ambos diámetros y al círculo C , y tiene radio 1. Determine la mayor longitud posible del radio de C .

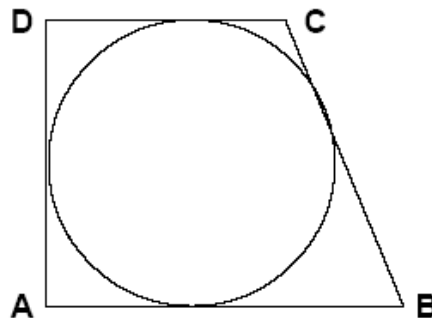
(Torneo de Matemática de Harvard-MIT, Febrero 1999)

6. Cada lado del cuadrado $ABCD$ tiene longitud 1 y $\angle PAQ = 45^\circ$. Determine el perímetro del triángulo PQC .



(Concurso de Matemática de la Universidad de Carolina del Sur, Diciembre, 1997)

7. $ABCD$ es un trapecio cuyos lados son tangentes al círculo. AB es paralelo a DC y el ángulo en A y en D son rectos. BC mide 7 y el radio del círculo 1. Determine el área del trapecio



(Material de preparación para la competencia olímpica del nivel Junior del Reino Unido, 2006)

8. El triángulo ABC es rectángulo en A , $AB = AC$ y M es el punto medio de AC . Sea P un punto de del lado BC tal que AP es perpendicular a BM . Sea H el punto de intersección de AP y BM . Determine $BP:PC$ (modificado)

(Examen de calificación para la aplicación de beca del gobierno Japonés, 2007)

NOTA: este ejercicio es parte de la prueba de aquellos que pretenden concursar por una beca a Japón, dicho programa de becas recibe el nombre de MONBUKAGAKUSHO)

9. En el triángulo ABC se tiene $AB = AC$. Los puntos medios de AB y AC son M y N , respectivamente. Las medianas MC y NB se intersecan en ángulo recto. Determine $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2$.

(Torneo de Matemática de Stanford, 2007)

10. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo (esto es, las diagonales del cuadrilátero están en su interior). Pruebe que

$$\text{Area}(ABCD) \leq \frac{|AB| \cdot |AD| + |BC| \cdot |CD|}{2}.$$

(Concurso de Matemática de la Universidad Kettering para estudiantes de Secundaria, 2001)

TEORÍA DE NÚMEROS.

1. Si $N = 9998^2 + 4(9998)$, determine el número de dígitos de N .

(Asociación de Ligas Matemáticas de Nueva Inglaterra, Playoffs, 2004)

2. El número de cuatro dígitos $2pqr$ es multiplicado por 4 y el resultado es el número de cuatro dígitos $rqp2$. Determine el valor numérico de $p + q$.

(Examen del nivel Senior, Torneo de Matemática Furman University Wylie, 1997)

3. R , S y P son tres diferentes números primos tales que $R + S^2 = P^4$. Determine todas las tripletas (R, S, P) que satisfacen la condición enunciada.

(Asociación de Ligas Matemáticas de Nueva Inglaterra, Playoffs, 2002)

4. Determine Todas las duplas de números enteros que satisfacen la ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{19}.$$

(Concurso de Matemática de la Universidad Kettering para estudiantes de Secundaria, 2003)

5. Sea A el conjunto de todos los números y , ordenados ascendentemente, tales que $24y + 1$ es un número cuadrado perfecto. Determine el elemento 2000 en A .

(XX Concurso de Matemática de Secundaria de Lehigh University / AT&T, 2000)

FUNCIONES O SUCESIONES.

1. f es una función continua de variable real tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todo real x, y . Si $f(2) = 5$, determine $f(5)$.

(Torneo de Matemática de Harvard-MIT, Febrero 1999)

2. Si $f(x)$ es una función que satisface la ecuación funcional $2f(x) + f(1 - x) = x^2$ para todo x , determine todas las funciones que satisfacen dicha ecuación.

(Concurso de Matemática de la Universidad de Carolina del Sur, Diciembre, 1997)

3. Si $f(m + 1) = m(-1)^{m+1} - 2f(m)$ para enteros $m \geq 1$, y $f(1) = f(2001)$. Determine el valor de $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2000)$.

(XX Concurso de Matemática de Secundaria de Lehigh University / AT&T, 2000)

4. Los números de Fibonacci son definidos por $F_1 = F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$. Los números de Lucas son definidos por $L_1 = 2, L_2 = 3$ y $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ para $n \geq 1$. Demuestre que $L_n = \frac{F_{2n}}{F_n}$.

$n \geq 1$. Demuestre que $L_n = \frac{F_{2n}}{F_n}$.

NOTA: Este ejercicio ha sido modificado puesto que se pedía calcular $\frac{\prod_{n=1}^{15} \frac{F_{2n}}{F_n}}{\prod_{n=1}^{13} L_n}$.

(Torneo de Matemática de Harvard-MIT, Marzo 2001)

5. Sea $f(n) = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_{n-1} n$. Determine el valor de $\sum_{k=2}^{10} f(2^k)$.

(Concurso de Matemática de la Universidad de Carolina del Sur, Diciembre, 1996)

4. CURIOSATO.

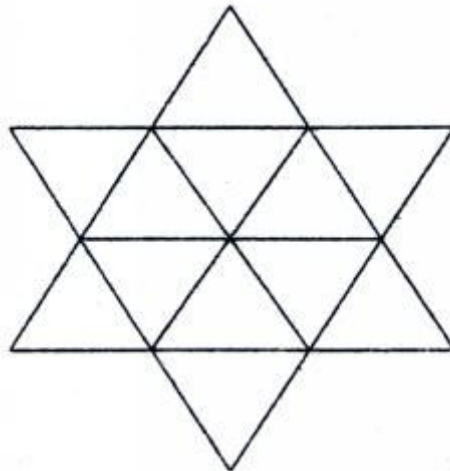
Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna tiene como finalidad mostrar ejercicios de preparación o competencia olímpicas en fases iniciales que se desarrollan en otros países.

Estos tipos de ejercicios son de selección única y se procurará brindar la solución de todos los ejercicios que se propongan. Es importante hacer notar que los mismos pueden servir de preparación para estudiantes que participan en los distintos niveles de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Continuamos con ejercicios correspondientes a los Problemas Introdutorias de la Olimpiada Sonorense de Matemática, estado de la República de México.

Problema 126. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



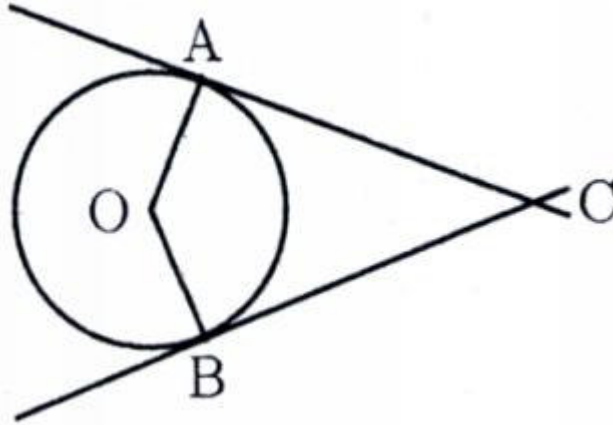
(a) 22

(b) 20

(c) 18

(d) 14

Problema 127. El triángulo ABC es equilátero y sus lados AC y BC son tangentes al círculo cuyo centro es O y cuyo radio es $\sqrt{3}$. El área del cuadrilátero $AOBC$ es:



- (a) $2\sqrt{3}$ (b) $\pi\sqrt{3}$ (c) 2π (d) $3\sqrt{3}$

Problema 128. ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación: $2^{3+x} + 2^{3-x} = 65$?

- (a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

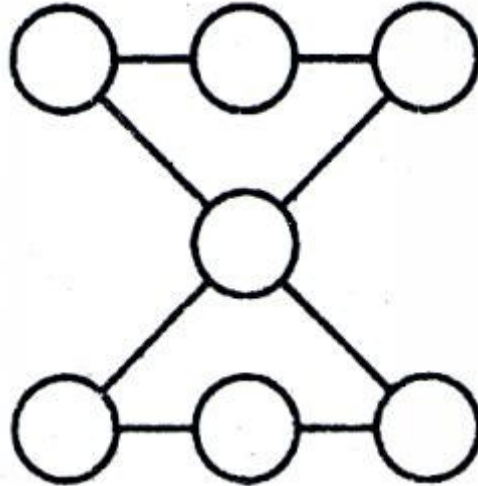
Problema 129. Los ángulos de un triángulo están en la razón $2 : 3 : 4$, la suma de los dos ángulos menores es:

- (a) 80° (b) 90° (c) 100° (d) 120°

Problema 130. Se tienen 9 ciudades y se quieren construir carreteras entre pares de ellas de tal forma que sea posible viajar entre cualesquiera dos de ellas. ¿Cuál es el mínimo número de carreteras que se deben construir?

- (a) 8 (b) 9 (c) 18 (d) 36

Problema 131. Arregla los números 5, 7, 11, 13, 17 y 23 en los siete círculos de la figura, de tal manera que la suma de los tres números en cada línea sea el mismo número primo. ¿Qué número queda al centro?



- (a) 7 (b) 11 (c) 13 (d) 17

Problema 132. Si $x^2 + 8x - 2 = 0$. ¿Qué número representa la expresión $x^4 + 8x + 16x + 10$?

- (a) 0 (b) 8 (c) 10 (d) 14

Problema 133. Se tiene un cuadrado $ABCD$ de lado igual a 8 y se dibuja un círculo que pasa a través de los vértices A y D , y es tangente al lado BC . El radio del círculo es:

- (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 8

Problema 134. Un comandante dispone su tropa formando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres. Entonces decide poner una fila y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado y se da cuenta que le faltan 75 hombres. ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

- (a) 12357 (b) 3061 (c) 364 (d) 1557

Problema 135. ¿Cuál de las siguientes condiciones deben cumplir las medidas de los lados x y y de una parcela rectangular de perímetro fijo P de manera que la parcela tenga la mayor área posible?

- (a) $x > y$ (b) $x = y$ (c) $x > P$ (d) $y < P$

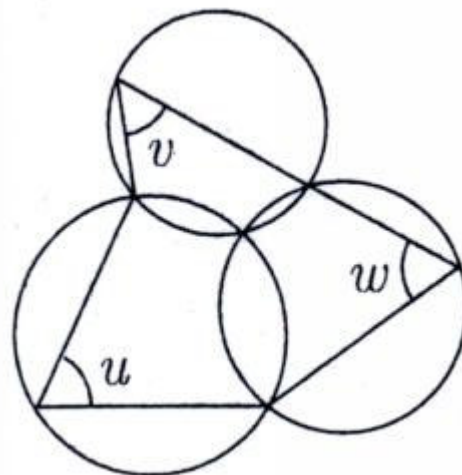
Problema 136. Si $ABCD$ es un cuadrado de lado 4, M es un punto sobre el segmento AB tal que AM es una cuarta parte de AB y P es la intersección de la diagonal DB y el segmento MC , ¿Cuánto mide PC ?

- (a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{4}{7}$ (c) $\frac{21}{3}$ (d) $\frac{20}{7}$

Problema 137. Un hombre nació en el año x^2 y murió en el año y^2 (donde los números x , y son enteros positivos). Considera que murió en el día de su cumpleaños. Sabemos que vivió entre el año 1800 y el 2000. ¿Cuántos años vivió el hombre?

- (a) 43 (b) 44 (c) 78 (d) 87

Problema 138. ¿Cuánto vale la suma de $u + v + w$, en la siguiente figura?



- (a) $3u$ (b) 180° (c) 360° (d) no se puede saber

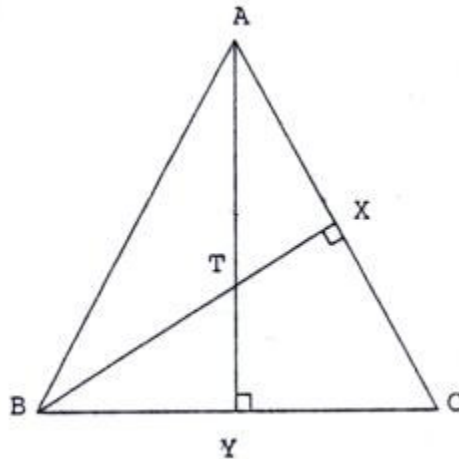
Problema 139. Si $(6!)(7!) = n!$, ¿Cuánto vale n ? ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot (n-1) \cdot n$)

- (a) 10 (b) 12 (c) 13 (d) 42

Problema 140. Los niños A , B y C tomaron 13 dulces de una mesa, al final, A dijo: "tomé 2 dulces más que B ", B dijo: "tomé la mitad de dulces que A y 5 menos que C ", y finalmente C dijo: "tomé un número par de dulces". Si sabemos que a lo más uno de ellos mentía, ¿quien era este mentiroso?

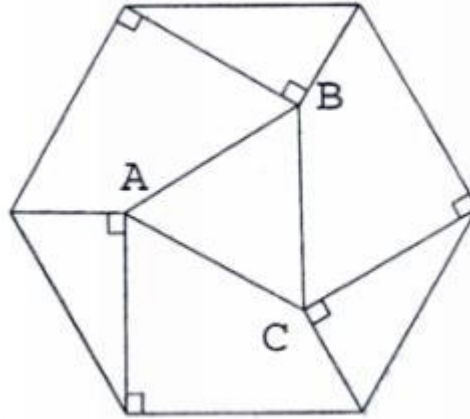
- (a) A (b) B (c) C (d) ninguno

Problema 141. En la siguiente figura, los segmentos AY y BX son perpendiculares a los segmentos BC y AC , respectivamente. Si el ángulo ABC mide 50° y el ángulo BAC mide 60° . ¿Cuánto mide el ángulo BTY ?



- (a) 60° (b) 70° (c) 80° (d) 50°

Problema 142. En la siguiente figura, cuál es el área del triángulo ABC , si el área del hexágono regular es H ?



- (a) $H/2$ (b) $H/4$ (c) $H/6$ (d) $H/8$

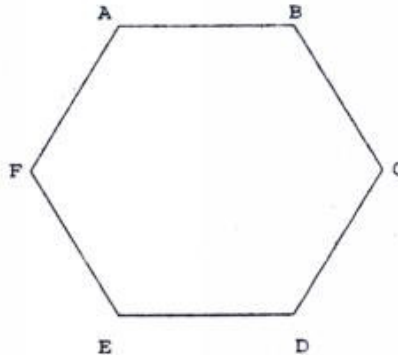
Problema 143. Si $(1 + 1/n) (1 - 1/m) = 1$ entonces m es igual a

- (a) $n - 1$ (b) $n + 1$ (c) $2n$ (d) $\sqrt{n^2 + 1}$

Problema 144. ¿De cuántas maneras distintas pueden colorearse los lados de un triángulo equilátero con cuatro colores distintos, si suponemos que un mismo color se puede emplear en lados distintos y que dos coloraciones son iguales si difieren en un giro del triángulo en el plano?

- (a) 4 (b) 20 (c) 24 (d) 16

Problema 145. En la siguiente figura cada vértice puede tomar el valor 1 ó -1, ¿cuántos valores distintos puede tomar la suma $A + B + C + D + E + F + ABCDEF$?



- (a) 14 (b) 8 (c) 7 (d) 4

Problema 146. La yerba en un prado crece con densidad y rapidez homogéneas. Sabiendo que 70 vacas consumen la yerba en 24 días y 30 vacas la comen en 60 días, ¿Cuántas vacas consumirán la yerba en 96 días?

- (a) 16 (b) 18 (c) 20 (d) 22

Problema 147. Dado un punto cualquiera P en el interior de un triángulo equilátero de lado 6, consideremos las perpendiculares que van de P a cada uno de los lados del triángulo. Llamemos H_1 , H_2 y H_3 al pie de las perpendiculares mencionadas.

¿Cuánto vale $PH_1 + PH_2 + PH_3$?

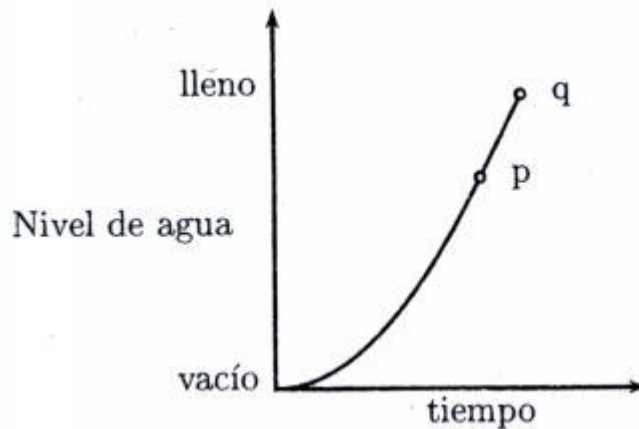
- (a) 2 (b) $3\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 4

Problema 148. Un estratega francés de la segunda Guerra Mundial tiene el siguiente problema. La distancia (en línea recta) de Chálons a Vitry es de 30 Km. De Vitry a Chaumont 80 km, de Chaumont a St. Quetin 236 km, de St. Quetin a Reims 86 km, de Reims a Chálons de 40 km.

¿Cuál es la distancia en línea recta que hay entre Reims y Chaumont?

- (a) 11 km (b) 120 km (c) 322 km (d) 150 km

Problema 149. Se llena un recipiente con agua, la cantidad de agua vertida a cada instante en la misma. La siguiente gráfica muestra el nivel del agua en el recipiente durante el tiempo en que es llenado.



El segmento PQ es una línea recta. La forma del recipiente que corresponde a la gráfica es:

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

Problema 150. Si $ABCD$ es un trapecio de bases $AB = 8$ y $CD = 2$ y sus diagonales se cortan en E , la razón del área del trapecio entre el área del triángulo ABE es:

- (a) 8
- (b) 4
- (c) $\frac{25}{16}$
- (d) $\frac{16}{25}$

5. Solución al *CURIOSATO*

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

A continuación brindamos la solución al *CURIOSATO* de esta edición.

Les recordamos que las soluciones que se brindan en esta columna solamente son unas guías de solución y que no pretenden, de ningún modo, limitar la riqueza e inventiva de solución a ejercicios de esta naturaleza.

126.- (b)	131.- (c)	136.- (d)	141.- (b)	146.- (c)
127.- (d)	132.- (d)	137.- (b)	142.- (d)	147.- (b)
128.- (b)	133.- (c)	138.- (b)	143.- (b)	148.- (d)
129.- (c)	134.- (b)	139.- (a)	144.- (c)	149.- (b)
130.- (a)	135.- (b)	140.- (c)	145.- (d)	150.- (c)

6. Solución a los problemas anteriores de la columna “Olimpiadas alrededor del mundo”.

Randall Godínez.

Arlene Martínez.

Melissa Ramírez.

Carlos Rodríguez.

Presentamos, a continuación, la solución de los diez problemas presentados en esta misma columna pero de la edición anterior. Hemos procurado adjuntar varias soluciones a los problemas con el fin de hacer notar que los mismos pueden ser enfocados y resueltos de diversas formas y que ello es lo que se busca en las competencias olímpicas: favorecer el pleno desarrollo de la creatividad del participante al momento de enfrentar los problemas y de ninguna manera encajonar su pensamiento.

Al mismo tiempo que se presenta una solución a determinado problema se advierte, cuando ello lo amerita, la teoría que se está aplicando en la solución del mismo con el fin de que se cuente con todo el marco teórico que se requiera para poder resolver otros problemas que puedan ubicarse en la misma categoría o bien que puedan reducirse a ellos.

Cuando se indique que la solución es oficial lo que se pretende indicar es que esa es la solución que se dio en la competencia señalada por parte del comité organizador o bien de su proponente.

Recuérdese que ningún problema está completamente cerrado por lo que se les solicita a nuestros estimables lectores que nos envíen sus comentarios o sugerencias que tengan a esta columna en particular mediante alguno de los correos indicados en la presentación.

Pues bien, veamos las soluciones de la columna anterior !!

1. Sea $p(x)$ un polinomio cúbico con raíces r_1, r_2, r_3 . Suponga que

$$\frac{p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(-\frac{1}{2}\right)}{p(0)} = 1000.$$

determine el valor de

$$\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}.$$

(Olimpiada Australiana de Matemática, 1996)

SOLUCIÓN:

Note que $p(0)$ es diferente de cero, así que r_1, r_2, r_3 no son cero. Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Por hipótesis

$$\left(\frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d\right) + \left(-\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d\right) = 1000d;$$

esto es $b = 1996d$. Ahora,

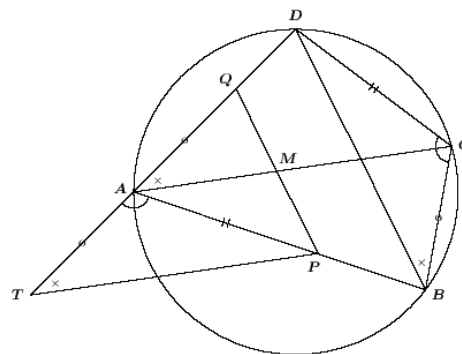
$$\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} = \frac{r_3 + r_1 + r_2}{r_1 r_2 r_3} = \frac{-b/a}{-d/a} = \frac{b}{d} = 1996.$$

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero concíclico y sean P y Q puntos sobre los lados AB y AD , respectivamente, tales que $AP = CD$ y $AQ = BC$. Sea M el punto de intersección de AC y PQ . Pruebe que M es el punto medio de PQ .

(Olimpiada Australiana de Matemática, 1996)

SOLUCIÓN:

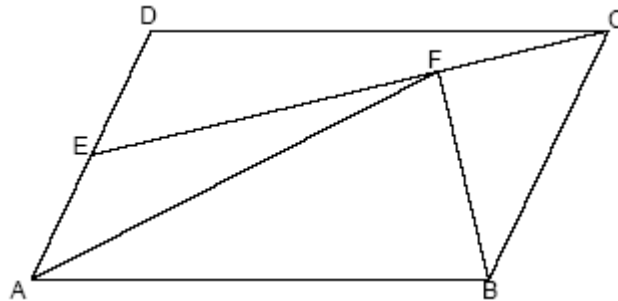
Consideremos la figura adjunta



Sea T un punto en AD tal que $AT = BC$. Entonces, $AP = CD$ y $\angle TAP = \angle TAB = \angle BCD$, tenemos que $\triangle ATP \cong \triangle CBD$, así que $\angle ATP = \angle CBD$. Desde que $\angle CBD = \angle CAD$, tenemos que $\angle ATP = \angle CAD$. Así, $TP \parallel AC$; esto es, $TP \parallel AM$.

Finalmente $PM : MQ = TA : AQ = BC : AQ = 1 : 1$, con lo que $PM = MQ$.

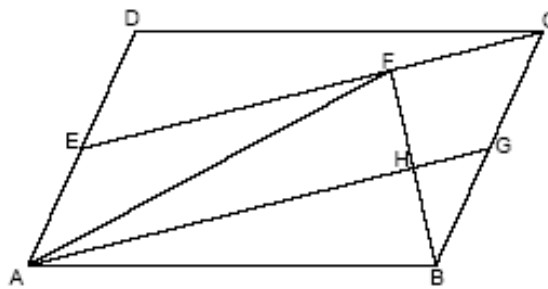
3. En el paralelogramo $ABCD$, E es el punto medio del segmento AD y F es la proyección ortogonal de B sobre CE , Pruebe que el triángulo ABF es isósceles.



(XXIV Olimpiada Portuguesa de Matemática, Categoría B, 2006)

SOLUCIÓN:

Considere la siguiente figura:



Sea G el punto medio de \overline{BC} y H la intersección de \overline{AG} y \overline{BF} . Desde que \overline{AG} y \overline{EC} son paralelos, los triángulos BCF y BGH son semejantes. Así, $\frac{BF}{BH} = \frac{CB}{GB} = 2$, esto quiere decir que H es el punto medio de \overline{BF} . De la semejanza se obtiene que \overline{AH} es perpendicular a \overline{BF} , luego, \overline{AH} es la altura del triángulo ABF relativa a la base \overline{BF} y divide a dicho segmento en dos segmentos congruentes. Por tanto, el triángulo ABF es isósceles.

4. Determine todos los números n tales que exactamente un quinto de los números $1, 2, 3, \dots, n$ son divisores de n .

(XXIV Olimpiada Portuguesa de Matemática, Categoría B, 2006)

SOLUCIÓN:

Para un número natural m se designa a $\tau(m)$ al número de divisores positivos de m . Observe que $\tau(m) \leq m$, para todo número natural m . Sea n un número natural tal que el número de sus

divisores positivos es $\frac{n}{5}$, esto es, $\tau(n) = \frac{n}{5}$. Entonces $\frac{n}{5}$ es un número entero, o sea, 5 divide a

n y, por tanto, $n = 5^k a$, donde k y a son números naturales y 5 no divide a a . De hecho, 5^k y a son primos entre sí, se concluye que los divisores positivos de n son los números

naturales de la forma bc con b divisor positivo de 5^k y c divisor positivo de a , luego $\tau(n) = \tau(5^k) \tau(a)$. Como 5 es un número primo, el número de divisores positivos de 5^k son

$k+1$, de donde se obtiene $\tau(a) = \frac{n}{5(k+1)} = \frac{5^{k-1}a}{k+1}$. Entonces $\frac{5^{k-1}a}{k+1} \leq a$, es decir,

$5^{k-1} \leq k+1$, se concluye que $k=1$. Así, $n = 5a$ y como a es un número natural primo con 5

tal que $\tau(a) = \frac{5^0 a}{2} = \frac{a}{2}$ entonces a es par y existen números naturales b e i , con b impar y

primo relativo con 5, tales que $a = 2^i b$. Desde que 2^i y b son primos relativos, se tiene que

$\tau(a) = \tau(2^i) \tau(b) = (i+1) \tau(b)$ y por tanto $\tau(b) = \frac{\tau(a)}{i+1} = \frac{a}{2(i+1)} = \frac{2^{i-1}b}{i+1}$. Como $\tau(b) \leq b$,

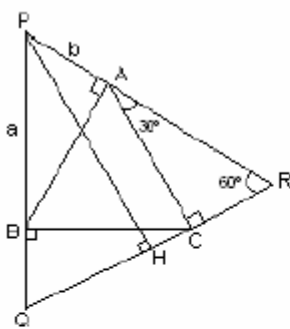
se obtiene $2^{i-1} \leq i+1$, se concluye que $i \in \{1, 2, 3\}$. Estudiamos estas tres posibilidades.

- Si $i=1$ se tiene $\tau(b) = \frac{b}{2}$, lo que es imposible ya que b es impar.

- Si $i = 2$ se tiene $\tau(b) = \frac{2b}{3}$, concluimos que 3 divide a b . Supongamos que $b = 3^j c$, con j y c números naturales y c impar y primo relativo con 3 y 5. Desde que 3^j y c son primos relativos, $\tau(b) = (j + 1) \tau(c)$ y, por tanto, $3\tau(b) = 2b \Leftrightarrow (j + 1)\tau(c) = 2 \times 3^{j-1} c$. Como $\tau(c) \leq c$, se obtiene $j = 1$ y $\tau(c) = c$. Existen, apenas, dos números naturales que verifican la última igualdad y que son 1 y 2. Como c es impar tiene que ser $c = 1$, y obtenemos que $n = 60$;
- Si $i = 3$ se tiene $\tau(b) = \frac{2^2 b}{4} = b$, como b es impar tiene que ser $b = 1$, y obtenemos que $n = 40$.

5. En un triángulo equilátero ABC, cuyo lado mide 4, se traza la recta perpendicular a AB por el punto A, la recta perpendicular a BC por el punto B y la recta perpendicular a CA por el punto C. Estas tres rectas determinan otro triángulo. Calcular el perímetro de este triángulo.
(XVI Olimpiada Nacional de Matemática, Paraguay, Nivel 3, 2004)

SOLUCIÓN:



Tenemos que: $AB = BC = AC = 4$

Como $BA \perp PR$ se tiene:

$$\angle CAR = \angle BAR - \angle BAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Como el triángulo ACR es recto en C, tenemos:

$$\angle ARC = 60^\circ$$

De igual forma se calculan los ángulos APB y BQC. Entonces:

$$\angle QPR = \angle PRQ = \angle RQP = 60^\circ$$

Por lo tanto, el triángulo PQR es también equilátero.

A partir de aquí consideramos dos procedimientos:

Procedimiento 1

Los triángulos rectángulos PAB , RCA , QBC son iguales por tener iguales uno de sus lados y los ángulos adyacentes iguales. Entonces:

$$PB = QC = RA = a \quad ; \quad BQ = CR = AP = b$$

Trazamos PH, altura del triángulo PQR, que es también la mediatriz de QR. Así:

$$PH = \sqrt{(a+b)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}(a+b)^2} = \frac{a+b}{2}\sqrt{3}$$

Como $PH \perp QR$ y $AC \perp QR$, resulta $PH \parallel AC$ y los triángulos PHR y ACR son semejantes.

Luego:

$$\frac{PH}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}}{b} = \frac{a+b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{a+b}{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{a+b}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$a = \frac{8}{3}\sqrt{3} \quad ; \quad b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Entonces, los lados del triángulo equilátero PQR miden:

$$\frac{8}{3}\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

El perímetro será:

$$P = 12\sqrt{3}$$

Procedimiento 2 (si se usa trigonometría)

En el triángulo PAB, tenemos:

$$\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{cotg}60^\circ = \sqrt{3} = \frac{4}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Luego, el perímetro es:

$$P = 3(a+b) = 3\left(\frac{8}{3}\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) \quad ; \quad P = 12\sqrt{3}$$

6. Se tiene un número entero A tal que A^2 es un número de cuatro cifras, con 5 en la cifra de las decenas. Hallar todos los valores posibles de A .

(XVI Olimpiada Nacional de Matemática, Paraguay, Nivel 3, 2004)

SOLUCIÓN:

Digamos que $A^2 = \overline{ab5c}$. Como A^2 es un cuadrado perfecto de cuatro cifras, A es un número de dos cifras mayor que 31, ya que:

$$31^2 = 961 \quad ; \quad 32^2 = 1.024$$

Los posibles valores de c son: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Vamos a buscar las posibilidades de obtener 5 en la cifra de las decenas.

Tenemos:

$$A = 10x + y$$

$$A^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$$

$$\text{Si } c = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A^2 = 100x^2 \Rightarrow \dots\dots\dots 50 \text{ (imposible)}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } c = 1 \Rightarrow y = 1, 9 \Rightarrow & A^2 = 100x^2 + 20x + 1 & A^2 = 100x^2 + 180x + 81 \\ & A^2 = 100x^2 + 10 \cdot 2x + 1 & A^2 = 100x^2 + 10 \cdot 18x + 80 + 1 \\ & 2x = \dots\dots 5 \text{ (imposible)} & A^2 = 100x^2 + 10(18x + 8) + 1 \\ & & 18x + 8 = \dots\dots 5 \text{ (imposible)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } c = 4 \Rightarrow y = 2, 8 \Rightarrow & A^2 = 100x^2 + 40x + 4 & A^2 = 100x^2 + 160x + 64 \\ & A^2 = 100x^2 + 10 \cdot 4x + 4 & A^2 = 100x^2 + 10 \cdot 16x + 60 + 4 \\ & 4x = \dots\dots 5 \text{ (imposible)} & A^2 = 100x^2 + 10(16x + 6) + 1 \\ & & 16x + 6 = \dots\dots 5 \text{ (imposible)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } c = 5 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow & A^2 = 100x^2 + 100x + 25 \\ & A^2 = 100x^2 + 10(10x + 2) + 5 \\ & 10x + 2 = \dots\dots 5 \text{ (imposible)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } c = 6 \Rightarrow y = 4, 6 \Rightarrow & A^2 = 100x^2 + 80x + 16 & A^2 = 100x^2 + 120x + 36 \\ & A^2 = 100x^2 + 10(8x + 1) + 6 & A^2 = 100x^2 + 10(12x + 3) + 6 \\ & 8x + 1 = \dots\dots 5 & 12x + 3 = \dots\dots 5 \\ & x = 3, 8 & x = 1, 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } c = 9 \Rightarrow y = 3, 7 \Rightarrow & A^2 = 100x^2 + 60x + 9 & A^2 = 100x^2 + 140x + 49 \\ & A^2 = 100x^2 + 10 \cdot 6x + 9 & A^2 = 100x^2 + 10(14x + 4) + 1 \\ & 6x = \dots\dots 5 \text{ (imposible)} & 14x + 4 = \dots\dots 5 \text{ (imposible)} \end{aligned}$$

Los posibles valores son:

$$\begin{array}{l} \text{Para } y = 4 \quad \rightarrow \quad x = 3, 8 \\ \text{Para } y = 6 \quad \rightarrow \quad x = 6 \end{array}$$

Entonces tenemos:

$$34^2 = 1.156 \quad ; \quad 84^2 = 7.056 \quad ; \quad 66^2 = 4.356$$

Y los valores de A son:

$$34 \quad ; \quad 66 \quad ; \quad 84$$

7. Sea \mathbb{Q}^+ el conjunto de los números racionales positivos. Determine todas las funciones

$f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$ tal que

$$\text{a. : } f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

$$\text{b. : } \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x) = f(x+1).$$

(Olimpiada Noruega de Matemática, 2003)

SOLUCIÓN:

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{f(1)}$. La función g satisface a. , b. y $g(1) = 1$. Primero probaremos que si g

existe entonces esta es única. Probaremos que g está únicamente definida para $x = \frac{p}{q}$ por

inducción sobre $\max(p, q)$. Si $\max(p, q) = 1$ entonces $x = 1$ y $g(1) = 1$. Si $p = q$ entonces $x = 1$ y g es única. Si $p \neq q$ entonces asumamos que $p > q$. De b. tenemos

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \left(1 + \frac{q}{p-q}\right) g\left(\frac{p-q}{q}\right). \text{ La hipótesis inductiva y } \max(p, q) > \max(p-q, q) \geq 1 \text{ nos}$$

da que $g\left(\frac{p}{q}\right)$ es única. Defina la función g por $g\left(\frac{p}{q}\right) = pq$ donde p y q son dados tales que

$mcd(p, q) = 1$. Es fácil observar que g satisface a. , b. y $g(1) = 1$. Todas las funciones que satisfacen a. y b. son de la forma $f\left(\frac{p}{q}\right) = apq$, donde $mcd(p, q) = 1$ y $a \in \mathbb{Q}^+$.

8. Pruebe que cualquier solución real de la ecuación

$$x^3 + px + q = 0$$

satisface la inecuación:

$$4qx \leq p^2.$$

(Olimpiada Noruega de Matemática, 2003)

SOLUCIÓN:

Sea x_0 una solución real de la ecuación cúbica dada, entonces

$$x^3 + px + q = (x - x_0)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a - x_0)x^2 + (b - ax_0)x - bx_0.$$

De donde $a = x_0$, $p = b - ax_0 = b - x_0^2$, $-q = bx_0$. Por lo tanto, $p^2 = b^2 - 2bx_0^2 + x_0^4$.

También, $4x_0q = -4x_0^2b$. Así, $p^2 - 4x_0q = b^2 + 2bx_0^2 + x_0^4 = (b + x_0^2)^2 \geq 0$.

9. Alejandra y Luz están jugando con fichas. El juego consiste en lo siguiente: Al principio ponen 2 pilas con 2004 fichas en cada una. En cada turno se escoge una pila y se toma de ella la cantidad de fichas que quieran, el último en tomar fichas gana (es decir quién ya no pueda tomar fichas pierde). Primero juega Alejandra y luego Luz, si suponemos que las dos son expertas en este juego, ¿hay forma de saber quién será la ganadora? En caso afirmativo da una estrategia que la hace ganadora, en caso contrario argumenta.

(18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Concurso Regional, Aguascalientes, 2004)

SOLUCIÓN:

Notemos que si después de varios turnos, en un montón ya no quedan fichas el jugador siguiente gana, sólo tiene que tomar todas las fichas del otro montón. Usando lo anterior, demostraremos que el segundo jugador gana: la estrategia a seguir es tomar tantas fichas como el primer jugador tome pero del montón contrario, dejando siempre las dos pilas con la

misma cantidad de fichas. De esa manera, el primer jugador será el primero en acabar las fichas de un montón lo que le dará la oportunidad al segundo de tomar las restantes de la otra pila. Por lo cual, Luz gana.

10. Sea a_n la última cifra de n^n , es decir: $a_1 = 1$ (la última cifra de $1^1 = 1$), $a_2 = 4$ (la última cifra de $2^2 = 4$), $a_3 = 7$ (la última cifra de $3^3 = 27$), etcétera.

Calcula la suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2003} + a_{2004}$.

(18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Concurso Regional, Aguascalientes, 2004)

SOLUCIÓN:

Si un número termina en 1, 5, 6, ó 0, cualquier potencia terminará en el mismo dígito: 1, 5, 6 ó 0. Cuando un número termina en 4, al elevarlo a un exponente impar, el resultado terminará en 4 y, al elevarlo a un exponente par, el resultado terminará en 6; puesto que un número terminado en 4 es par, si n termina en 4, entonces n^n terminará en 6. Algo parecido sucede para los números que terminan en 9: si se elevan a un exponente impar, el resultado terminará en 9 y, si la potencia es par, entonces terminarán en 1, por lo que si n termina en 9 n^n siempre terminará en 9. Cuando un número terminado en 2 se eleva a un exponente, la terminación del resultado puede ser 6, 2, 4 u 8, dependiendo de que el exponente al que se eleva sea de la forma $4k$, $4k+1$, $4k+2$ o $4k+3$, respectivamente, por lo que si $n = 4$, n^n será 6 ó 4. Haciendo un razonamiento análogo con los números terminados en 3, 7 y 8 tenemos que si $n = 3$, n^n terminará 3 ó 7, si $n = 7$, n^n será 7 ó 3, y si $n = 8$, n^n será 4 ó 6.

Resumiendo:

- a) Siempre tienen la misma terminación (los que terminan en 1, 5, 6 ó 0).
 - b) Tienen dos tipos de terminaciones, (los que terminan en 4 ó 9), y para este problema n^n siempre tendrá la misma terminación.
 - c) Tienen cuatro tipos de terminaciones (los que terminan en 2, 3, 7 u 8), que se van alternando.
- Por lo anterior, sólo basta calcular la suma de los primeros 20 términos, ya que se repetirá esta suma cada veintena:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Suma
a_n	1	4	7	6	5	6	3	6	9	0	1	6	3	6	5	6	7	4	9	0	94

Entonces $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2000} = 100 \times 94 = 9400$, por lo cual $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2003} + a_{2004}$ es igual a $9400 + 1 + 4 + 7 + 6 = 9418$.

7. Olimpiadas alrededor del mundo.

Randall Godínez.

Arlene Martínez.

Melissa Ramírez.

Carlos Rodríguez.

En esta columna, a partir de esta edición, se propondrán únicamente problemas que hayan sido parte de exámenes de competencias olímpicas, nacionales o internacionales, con esto pretendemos que otros tipos de competencias sean abordados en la columna *Problemas de Competencias no Olímpicas* (antes denominada problemas propuestos) de esta misma revista.

1. Los términos a_n de una secuencia de enteros positivos satisfacen la relación

$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + a_n) \text{ para } n = 1, 2, 3 \dots$$

Si $a_5 = 35$ determine el valor de a_4 .

(XXVII Olimpiada Brasileña de Matemática, Primera Fase, Nivel 3, 1995)

2. Sea a un número entero positivo tal que a es múltiplo de 5, $a + 1$ es múltiplo de 7, $a + 2$ es múltiplo de 9 y $a + 3$ es múltiplo sw 11. Determine el menor valor que puede tomar a .

(XXVII Olimpiada Brasileña de Matemática, Segunda Fase, Nivel 2, 1995)

3. ¿Cuál es la suma de todos los números de 4 dígitos que están formados sólo por cifras impares?

(XX Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Tercera Etapa de la Olimpiada Estatal de Matemáticas, Puebla, 2006)

4. ¿Cuántos números naturales entre **1** y **2006** utilizan sólo dos dígitos diferentes en su escritura?

(Por ejemplo, 272 cumple la condición pero 1929 no la cumple)

(XX Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Tercera Etapa de la Olimpiada Estatal de Matemáticas, Puebla, 2006)

5. Por el baricentro G de un triángulo ABC se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que:

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$$

(Fase nacional de Olimpiada Matemática Española, 1995)

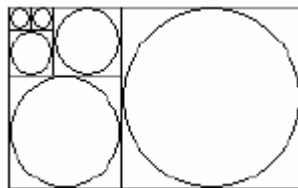
6. Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

(Fase nacional de OME, 1998)

7. El rectángulo de la figura está dividido en 6 cuadrados de diferente tamaño.

Cada cuadrado tiene inscrita una circunferencia. La suma del área de los 6 círculos correspondientes es $104 \pi \text{ cm}^2$. Hallar el área del rectángulo



(XVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA, Ronda final Nivel 1, Paraguay, 2004)

8. Se escribe en orden ascendente la lista completa de los capicúas de tres cifras:

101 , 111 , 121 , 131 , , 979 , 989 , 999

Se eliminan luego ocho capicúas consecutivos y se suman los números que quedan en la lista, obteniéndose 46.150. Determinar los ocho capicúas borrados.

(XVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA, Ronda final Nivel 3, Paraguay, 2005)

9. Sean a, b, c los lados de un triángulo y Δ su área. Probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta.$$

(Olimpiada Internacional de Matemática, 1961).

10. Halle las raíces r_1, r_2, r_3, r_4 de la ecuación: $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$ sabiendo que son reales, positivas y que

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

(Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 1985)

8. Lógica y Matemática Recreativa.

Maynor Castro
Carlos Molina
Mauricio Ramírez
Simón Sánchez
Erick Solano

En esta columna continuamos con la presentación de diez ejercicios que se han presentado en concursos de E.S.O de España.

Por otro lado, y al igual que en la edición anterior, al final de los enunciados damos una solución a los mismos esperando que sirvan como una guía aunque sabemos que se pueden encontrar otras vías de solución a cada uno de ellos.

Pues bien, empecemos y que se diviertan !!!

1º Juego (12-14 años): Torneo Garnacha

En el torneo veraniego "Garnacha" de fútbol participaron cuatro equipos: el Menisco C.F., el Real Broncas, el Patadín Deportivo y el Garnacha Atlético. El torneo se disputó por el sistema de liguilla: cada equipo jugó un partido contra los otros tres. Los aficionados recuerdan de forma muy especial este torneo no sólo porque el club organizador se hizo una vez más con el trofeo, sino también porque no hubo dos partidos que terminaran con el mismo resultado. La tabla de la competición quedó así:

	Partidos				Goles	
	Jugados	Ganados	Empatados	Perdidos	A favor	En contra
Garnacha	3	2	1	0	4	1
Patadín	3	2	0	1	8	4
Menisco	3	1	0	2	1	6
Broncas	3	0	1	2	2	4

Averigua razonadamente cuáles fueron los resultados de los seis partidos

(XIV O.M. Nacional. La Rioja. 2003)

2º Juego (12-14 años): Los ciclistas domingueros

Un domingo por la mañana salen, a la misma hora, tres ciclistas desde la plaza de Castelar de Elda, con el propósito de llegar a un pueblo de la provincia de Albacete. El más rápido llega al pueblo una hora antes del mediodía y su velocidad es de 15 km/h. El más lento llega al pueblo una hora después del mediodía y su velocidad es de 10 km/h. El otro ciclista llega exactamente al mediodía pero su velocímetro no funciona.

- ¿A que hora salen de Elda?
- ¿Que distancia hay desde el pueblo hasta Elda?
- ¿Cuál es la velocidad del ciclista que llega al mediodía?

(X O.M. Fase Provincial. Alicante. 2001)

3º Juego (12-14 años): Primos y primos

A Pepito Pinto le encantan las mates. Últimamente atraviesa una etapa en la que ve números por todas partes. Toni y Tina son dos primos suyos y primos entre sí, que viven en casas vecinas y en la misma acera de la misma calle donde también vive él. Ayer mientras jugaban les dijo Pepito: "¡Qué cosas primos, vivimos en tres casas cuyos números son primos consecutivos y por si fuera poco el producto de estos tres números no es primo pero es mi número de teléfono!"

Pues bien, sabiendo que el número de teléfono de Pepito tiene seis cifras y termina en uno, ¿sabrías averiguar los números primos de las casas donde viven los tres primos?

(XIX O.M. Fase Provincial. Sevilla. 2003)

4º Juego (12-14 años): Un poema

Un collar se rompió mientras jugaban dos enamorados.

Una hilera de perlas se escapó: la sexta parte al suelo cayó;

la quinta parte en el lecho se quedó ; un tercio, por la joven se salvó ;

la décima parte el bien amado recogió, y con seis perlas el cordón se quedó.

Dime lector, ¿ cuántas perlas tenía el collar de los bienaventurados?

(VII O.M. de Cantabria. 2003)

5° Juego (12-14 años) P-7: Telematemática

Los participantes de un concurso de televisión deben contestar a 30 preguntas. Cuando dan una respuesta correcta, obtienen un punto. Si "pasan", no obtienen puntos. Si contestan incorrectamente pierden medio punto.

Cierto concursante acumula solamente 6 puntos. ¿Puedes indicar de qué tipo fueron sus respuestas?

(II O.M. Galega. Fase Final. 2002)

6° Juego (12-14 años): Las teclas

Inicialmente hay un 1 en la pantalla de la calculadora. Al apretar la tecla A se multiplica por 3, y al apretar la tecla B se resta 1 del número de la pantalla.

Utilizando varias veces las teclas A y B hay que obtener el número 97.

¿Cuál es el número mínimo de veces que se deben pulsar cada una de las teclas? ¿En qué orden?

(XI O.M. Provincial. Valladolid. 2003)

7° Juego (12-14 años): Error digital

Se pide a un estudiante que multiplique 78 por un número de dos cifras en el que la cifra de las decenas es tres veces mayor que la de las unidades. Por error, intercambia los dígitos en este factor y obtiene un número que es 2808 unidades menor que el producto buscado. ¿Cuál es el producto buscado?

(O.M. Panameña. 2003)

8° Juego (12-14 años): En Matelandia...

En cada una de las cuatro ciudades que hay en Matelandia hay exactamente el mismo número de habitantes. Dicho número está formado por cinco cifras distintas y, curiosamente, el número total de matelandeses está formado por esas mismas cifras pero invertidas.

¿Cuántos habitantes viven en Matelandia?

(XVIII O.M. Thales. Fase Provincial. Córdoba. 2002)

9º Juego (12-14 años): Lío deportivo

En un grupo de 230 alumnos/as, hay:

- 15 que practican fútbol, atletismo y baloncesto.
- 23 que practican fútbol y baloncesto.
- 36 que practican atletismo y baloncesto.
- 28 que practican atletismo y fútbol.
- 61 que practican fútbol.
- 64 que practican baloncesto.
- 75 que practican atletismo.

¿Cuántos no practican ningún deporte?

(VI O.M. Galega. 2004)

10º Juego (12-14 años): La panadería

La panadería de mi barrio vende panecillos a \$30 cada uno, o 7 panecillos en \$100 o una docena de panecillos en \$180. Mi mamá me dio un billete de \$1000 y me dijo que comprara 60 panecillos y que me quedara con las (de)vuelatas. Quiero comprar al menos 60 panecillos y quedarme con la mayor cantidad de dinero posible.

¿Cuál es la mayor cantidad de dinero con que me puedo quedar?

(XVII Competencia Regional de Matemáticas. Colombia. 1998)

SOLUCIONES PROPUESTAS

Torneo Garnacha

Los resultados son los siguientes:

2 Garnacha-Patadín 1

2 Garnacha-Menisco 0

0 Broncas-Garnacha 0

2 Broncas- Patadín 3

0 Menisco- Patadín 4

1 Menisco- Broncas 0

Los ciclista domingueros

Para ayudarnos a resolver el problema, mantenemos andando al ciclista mas rápido, hasta que llegue a Albacete el ciclista cuyo velocímetro no funciona. De esta manera, tendríamos esta colocación:

(Ciclista mas lento): a falta de 10 km para llegar al pueblo.

(Ciclista con velocímetro roto): en el mismo pueblo.

(Ciclista mas rápido): 15 km más allá del pueblo.

Se observa que la distancia que separa al más lento del más rápido son 25 km. Con este dato podremos averiguar el tiempo que se necesita para que el más rápido saque una ventaja de 25 km al más lento. Como cada hora le aventaja en 5 km, necesitará 5h para que la ventaja sea de 25 km. 5h será, precisamente, el tiempo empleado por el ciclista que llega al mediodía (el más rápido ya llevará una hora en el pueblo, como dice el problema; el más lento tardará, aún, una hora en llegar.)

Por lo tanto, SALEN DE ELDA A LAS 7 H ($12h-5h = 7h$).

Del pueblo a Elda, HAY 60 km ($10km/h \cdot 5h = 50$; $50+10$ km que le faltan por hacer).

El ciclista que llega al mediodía va a una VELOCIDAD de $12km/h$ ($60km:5h = 12km/h$)

Primos y primos

Primero, tenemos que buscar números primos consecutivos y debemos hacerlo entre el primo 47 y el número primo 97, ya que el producto de tres números primos, menores que 47, no dan un número de seis cifras como resultado; y los mayores que 97 dan un resultado de más de seis cifras.

Segundo, al ser la última cifra del producto de los tres números un 1, los números primos deberán terminar de alguno de los siguientes números:

111

137

339

199

Escribimos los números primos entre los que debemos de buscar, ya que no llegan a la docena.

47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Para que el producto de los tres termine en 1, hay dos soluciones posibles:

$67 \cdot 71 \cdot 73 = 347261$ [Este sería el número de teléfono de Pepito y vivirían en los números 67,71 y 73].

$73 \cdot 79 \cdot 83 = 478661$ [No puede ser porque Toni y Tina no vivirían en casas vecinas]

Un poema

Podemos resolver el problema mediante una ecuación.

Llamamos x al número total de perlas del collar. Según nos dice el problema tendríamos:

$$x = x/6 + x/5 + x/3 + x/10 + 6$$

Buscamos el m.c.m. de 6,5,3 y 10. [m.c.m.= 30]

Sustituimos los denominadores por 30 y multiplicamos los respectivos numeradores por el mismo número por el que hemos multiplicado el denominador para que dé como resultado 30.

$$x = 5x/30 + 6x/30 + 10x/30 + 3x/30 + 6$$

$$x = 24x/30 + 6$$

Multiplicamos por 30

$$30x = 24x + 180$$

$$30x - 24x = 180$$

$$6x = 180$$

$$x = 180/6$$

$$x = 30$$

Por lo tanto, el collar de los bienaventurados TENIA 30 PERLAS.

Telematemática

Hay varias soluciones

Bien-mal-pasado

12	12	6
6	0	24
13	14	3
14	16	0
11	10	9
10	8	12
9	6	15
8	4	18
7	2	21

Las teclas

Como no existe tecla que sume, debemos buscar por encima del 97 el número que se aleje lo menos posible de él y que sea múltiplo de tres; después podremos utilizar la tecla de restar hasta llegar al 97.

Como es obvio, el número que cumple estas condiciones es el 99. Si, mentalmente "rebobinamos", en el paso anterior a la utilización de la tecla A, estaríamos en el número 33; y en el paso anterior en el número 11. Ahora debemos encontrar la manera más breve de llegar al 11, utilizando las teclas A y B. Lo hacemos de la siguiente manera:

Pulsamos la tecla A y tenemos un 3 en la pantalla.

Pulsamos la tecla B y nos queda un 2 en la pantalla.

Pulsamos de nuevo la tecla A y obtenemos un 6.

Pulsamos dos veces la tecla B y tenemos un 4.

Pulsamos la tecla A y obtenemos el número 12.

Una pulsación más de la tecla B y hemos conseguido el número 11. Dos veces pulsada la tecla A estamos en el 99 y con otras dos de la B obtenemos el número 97.

Hemos seguido este orden: A + B + A + 2B + A + B + 2A + 2B

Error digital

Buscamos los números en los que la cifra de las decenas es tres veces mayor que el de las unidades.

Podrían ser: 3 0, 3 1, 6 2, 9 3

Multiplicamos las unidades del número 78, es decir el 8, por esas posibles parejas y hallamos su diferencia; así veríamos cuál sería la cifra de las unidades del número menor que se obtendría al intercambiar los dígitos y lo compararíamos con la cifra de las unidades de 2808.

Si multiplicamos por 30, obtendríamos un 0 en las unidades.

Si lo hacemos por 03, tendríamos un 4.

Restando ambas, obtenemos un 6 [no nos vale porque ha de terminar en 8]

Por 31, un 8

Por 13, un 4 [Diferencia 4; tampoco nos vale]

Por 62, un 6

Por 26, un 8 [Diferencia 8; puede ser válido]

Por 93, un 4

Por 39, un 2 [Diferencia 2; no nos vale]

Comprobamos con 62 y 26.

$$78 \cdot 62 = 4836$$

$$78 \cdot 26 = 2028$$

$$4836 - 2028 = 2808.$$

4836 es EL PRODUCTO BUSCADO.

En Matelandia...

La primera cifra de cada una de las cuatro ciudades, (la decena de millar) sólo puede ser un 1 ó un 2; si fuera un número superior -al multiplicar por 4-, los habitantes totales de Matelandia sería un número de seis cifras y no de cinco.

El primer número de Matelandia -decena de millar- será, por lo tanto, un 4 ó un 8. Ha de ser un 8; si fuera un 4, no coincidirían la cifra de las unidades de Matelandia con la de las decenas de millar de los habitantes de cada una de las ciudades.

Tenemos en cada ciudad:

$$\begin{array}{r} 2 \dots 8 \\ \times 4 \\ \hline 8 \dots 2 \end{array}$$

En la multiplicación anterior, al multiplicar 4 por las unidades de millar no tenemos que llevarnos ninguna: esto sólo es posible con cero, o con uno; el dos lo descartamos porque ya lo tenemos y han de ser "cifras distintas". Tenemos que poner un 1, y esta será la cifra de las decenas de Matelandia. [No podemos poner 0 porque al "llevarnos tres, no hay ningún número que multiplicado por 4 y sumado 3 nos dé 0] Como nos llevamos 3, para obtener 1, llevándose 3, sólo es posible multiplicando por 2 ó por 7, pero como el 2 ya lo tenemos, debe de ser 7. Lo que nos dice que las unidades de millar de Matelandia también será 7.

Tenemos pues:

$$\begin{array}{r} 21.78 \\ \times 4 \\ \hline 87.12 \end{array}$$

Vemos que tenemos que "llevarnos tres" en las centenas para que las unidades de millar sea un 7. Para que esto sea posible tenemos que multiplicar por 8 ó por 9. Descartado el 8, que ya lo tenemos, sólo nos queda el 9.

87 912 HABITANTES VIVEN EN MATELANDIA.

Lío deportivo

No practican deporte 102 alumnos.

23-15=8 alumnos que practican fútbol y baloncesto.

28-15=13 alumnos que practican fútbol y atletismo.

36-15=21 alumnos que practican baloncesto y atletismo.

15 alumnos practican los tres deportes.

40 alumnos practican fútbol.

35 practican baloncesto.

41 practican atletismo.

$61 - (8 + 15 + 13) = 25$ alumnos que practican fútbol.

$64 - (8 + 15 + 21) = 20$ alumnos que practican baloncesto.

$75 - (13 + 15 + 21) = 26$ alumnos que practican atletismo.

$13 + 21 + 15 + 8 = 57$ alumnos que practican dos o más deportes

$57 + 20 + 25 + 26 = 128$ alumnos que practican deporte.

$230 - 128 = 102$ alumnos que no practican deporte.

La panadería

Los panecillos más baratos son los que se venden de 7 en 7. Debemos comprar los máximos posibles de este grupo y completar con los que se venden de 12 en 12 que son los siguientes más económicos.

Creo que debe comprar 7 paquetes de 7 y un paquete de 12 (aunque compra 61 panecillos, salen más baratos que comprar 60 haciendo otras combinaciones, como se puede ver a continuación).

De 12	De 7	Unidades	Precio
5 paquetes			900 (60 panes)
1 paquete	7 paquetes		880 (61 panes)
2 paquetes	5 paquetes	1 panecillo	890 (60 panes)

Se quedará con \$120

Seguidamente presentamos ciertos fragmentos del humor matemático:

Aritmética de la PAREJA.-

Hombre inteligente + Mujer inteligente = ROMANCE

Hombre inteligente + Mujer tonta = AVENTURA

Hombre tonto + Mujer inteligente = MATRIMONIO

Hombre tonto + Mujer tonta = EMBARAZO

Aritmética de la EMPRESA.-

Jefe inteligente + Empleado inteligente = BENEFICIO

Jefe inteligente + Empleado tonto = PRODUCCIÓN

Jefe tonto + Empleado inteligente = ASCENSO

Jefe tonto + Empleado tonto = HORAS EXTRA

Fiesta matemática.-

Esto es una fiesta matemática, y va pi y le dice a e^x que está apartado en un rincón:

- "Y tú, ¿no te integras?".

- "Me da lo mismo".

La ayuda paterna.-

- "¡Papá, papá!, ¿me haces el problema de Matemáticas?".

- "No hijo, no estaría bien".

- "Bueno, inténtalo de todas formas".

Pregunta en clase.-

El maestro.- "A ver, Jaimito, contesta rápidamente: ¿Cuántos son dos y dos?".

Jaimito.- "Cinco".

El maestro.- "¿Cómo puedes ser tan burro?".
Jaimito.- "Pero usted qué quiere, ¿rapidez o precisión?".

Examen de límites.-

En Bilbao, al salir de un examen de Análisis Matemático:

- "Oye Patxi, ¿qué te ha dado el segundo límite, pues?".
- "Más infinito".
- "¿Sólo?".

Matemáticas bíblicas.-

En aquel tiempo, dijo Jesucristo a sus apóstoles:

- " $y = 2x^2 + 3x - 5$ "
A lo cual, respondió Pedro:
- "Maestro, no te entendemos".
Y contestó Jesucristo:
- "Es una parábola".

El sargento.-

En el cuartel, un sargento:

- "Bueno, hoy vamos a dar clase de Química. A ver, ¿quién sabe a qué temperatura hierve el agua?".
- "¡ A 100 grados!".
- " Falso".
- "¡A cien grados, mi sargento!".
- " No es correcto".
- "¡A cien grados!".
- "¡No!".

Después de decirle varias personas que hervía a cien grados, se decide a mirar la chuleta donde lo tenía apuntado.

- "¡Uy!, Perdón... lo acabo de ver y sí, el agua hierve a cien grados. ¡Los que hierven a 90 grados son los ángulos rectos!".

Geometría real como la vida misma...-

- "Si acariciamos un círculo, se convierte en un círculo vicioso" (Eugene Ionesco).
- "Las rectas paralelas se encuentran en el infinito. Cada tarde a las 7h. 30 m." (J. Perich).
- "La línea más corta entre dos puntos es la línea recta en bajada" (Jaume Perich).
- "La circunferencia es una curva cerrada, incluso en días laborables".
- "La elipse es la única figura geométrica que puede ser de dos formas: de sol y de luna".

Incógnita.

El profesor.- "... despejando x obtenemos que $x = 3$ ".

El alumno.- "¡Un momento!, ¡usted dijo ayer que x era igual a 2!".

Sobre gustos...

Me gustan los polinomios, pero sólo hasta cierto grado.

Personalidad negativa.

Era un hombre que tenía una personalidad tan negativa, tan negativa, tan negativa, que cuando llegaba a una reunión los presentes empezaban a mirarse extrañados y preguntaban: "¿Quién se ha ido?".

Al 50%.

En cierta ocasión le preguntaron a un vendedor que cómo podía vender tan baratos sus sandwiches de conejo, a lo que respondió:

- "Bueno, tengo que admitir que hay un poco de carne de caballo. Pero la mezcla es sólo al 50%; uso el mismo número de conejos que de caballos".