

*Sociedad Ramamsem*

*Problemas de Matemática para*

*Competencias olímpicas*

Elaborado por :

Miguel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

III TRIMESTRE DEL 2007

# CONTENIDO

---

	Página
1. Presentación	1
2. Solución a los anteriores Problemas de Competencias no Olímpicas	2
3. Problemas de Competencias no Olímpicas	17
4. <i>CURIOSATO</i>	24
5. Solución al <i>CURIOSATO</i>	32
6. Solución a los problemas anteriores de la columna “Olimpiadas alrededor del mundo”.	33
7. Olimpiadas alrededor del mundo	44
8. Lógica y Matemática Recreativa	47

---

## 1. Presentación.

Esta publicación es realizada por la Sociedad RAMAMSEM y va dirigida a todas aquellas personas que deseen explorar una matemática diferente a la que se enseña en secundaria, y algo más !

Toda comunicación o información con respecto a los problemas propuestos o soluciones, pueden ser enviados a



[ramamsem@latinmail.com](mailto:ramamsem@latinmail.com) o bien [ramamsem@costarricense.cr](mailto:ramamsem@costarricense.cr)

En las siguientes ediciones procuraremos ofrecerles una explicación del tipo de competencias olímpicas de Matemática tanto nacionales como internacionales que se desarrollan alrededor del mundo. Esto es, cómo se participa, el formato de las pruebas, su calificación, cómo se premia a sus participantes y, si es del caso, señalar la participación de nuestro país en dichas competencias. Además, se comentará sobre algunas revista electrónicas o libros de interés referentes a Olimpiadas de Matemática señalando también la o las páginas WEB que correspondan.

## **2. Solución a los anteriores Problemas de Competencias no Olímpicas.**

Miguel Ángel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

A continuación brindamos la solución de los 30 ejercicios propuestos en la columna **Problemas de Competencias no Olímpicas** de la edición anterior.

Les recordamos que la forma de resolver cada ejercicio no necesariamente es la única, así que invitamos al estimable lector a enviarnos sus soluciones a los mismos.

### **ÁLGEBRA.**

1. El producto  $N$  de tres enteros positivos es seis veces la suma de ellos. Uno de los enteros es la suma de los otros dos. Determine la suma de todos los posibles valores de  $N$ .

(AIME, 2003)

**SOLUCIÓN:**

Llamemos a los tres números  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , y, sin pérdida de generalidad, asumamos que  $a \leq b \leq c$ . Entonces,  $abc = 6(a + b + c)$ , y  $c = a + b$ . Así,  $abc = 12c$  con lo que  $ab = 12$ , por lo que  $(a, b, c) = (1, 12, 13)$ ,  $(2, 6, 8)$ , o  $(3, 4, 7)$  con lo cual  $N = 156, 96$  ó  $84$ . La suma de los posibles valores de  $N$  es 336.

2. Las raíces de  $x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$  son  $a, b, c, d$ . Determine  $p(a) + p(b) + p(c) + p(d)$ , donde

$$p(x) = x^6 - x^5 - x^5 - x^2 - x.$$

(AIME, 2003)

SOLUCIÓN:

$x^4 - x^3 - x^2 - 1 = (x + 1)(x^3 - 2x^2 + x - 1)$ , así  $a = -1$ ,  $b + c + d = 2$ ,  $bc + cd + db = 1$ . Con lo que  $b^2 + c^2 + d^2 = 2^2 - 2 = 2$ . Tenemos  $p(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) + x^2 - x + 1$ . Entonces  $p(a) = 3$ ,  $p(b) = b^2 - b + 1$ ,  $p(c) = c^2 - c + 1$ ,  $p(d) = d^2 - d + 1$ , así  $p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 6 + (b^2 + c^2 + d^2) - (b + c + d) = 6$ .

3. Las soluciones del sistema  $\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 4 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1 \end{cases}$  son  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ .

Determine  $\log_{30} (x_1 y_1 x_2 y_2)$ .

(AIME, 2002)

SOLUCIÓN:

Sean  $a = \log_{225} x$ ,  $b = \log_{64} y$ . Entonces  $\log_x 225 = \frac{1}{a}$ ,  $\log_y 64 = \frac{1}{b}$ , así, las ecuaciones

dadas son equivalentes a  $\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1 \\ a + b = 4 \end{cases}$ . Resolviendo el sistema anterior se obtiene

$(a, b) = (3 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$  ó  $(3 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ . Tenemos que  $\log_{225} x_1 x_2 = a_1 + a_2 = 6$ , así  $x_1 x_2 = 15^{12}$ , y  $\log_{64} y_1 y_2 = b_1 + b_2 = 2$ , con lo que  $y_1 y_2 = 2^{12}$ . Finalmente  $\log_{30} (x_1 y_1 x_2 y_2) = 12$ .

4.  $m, n$  son primos relativos. Los coeficientes de  $x^2$  y  $x^3$  en la expansión de  $(mx + n)^{2000}$  son iguales. Determine  $m + n$ .

(AIME, 2000)

SOLUCIÓN:

Aplicando el binomio de Newton tenemos  $\frac{1998}{3} \cdot \frac{m}{n} = 1$ , o bien  $\frac{m}{n} = \frac{1}{666}$ . Por tanto,

$$m + n = 667.$$

5.  $x, y, z$  son números reales positivos tales que  $xyz = 1$ ,  $x + \frac{1}{z} = 5$ ,  $y + \frac{1}{x} = 29$ . Determine

$$z + \frac{1}{y}.$$

(AIME, 2000)

SOLUCIÓN:

$$\frac{1}{z} = 5 - x, y = 29 - \frac{1}{x}. \text{ Entonces } x\left(29 - \frac{1}{x}\right) = 5 - x, \text{ así } x = \frac{1}{5}, y = 24, z = \frac{5}{24} \text{ y } z + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}.$$

6. Las raíces de  $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$  son  $a, b, c$ . La ecuación con raíces  $a + b, b + c, c + a$  es  $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ . Determine  $t$ .

(AIME, 1996)

SOLUCIÓN:

$a + b + c = -3$ , así la ecuación requerida tiene raíces  $-3 - a, -3 - b, -3 - c$ . Si  $y = -3 - x$ , entonces  $(-3 - y)^3 + 3(-3 - y)^2 + 4(-3 - y) - 11 = 0$ , con lo que, al desarrollar, se obtiene  $t = 23$ .

7.  $m, n$  son enteros positivos tales que  $mn + m + n = 71$ ,  $m^2n + mn^2 = 880$ , determine  $m^2 + n^2$ .

(AIME, 1991)

SOLUCIÓN:

Sean  $s = m + n$ ,  $p = mn$ . Entonces  $s = 55$ ,  $p = 16$ . Esto es fácil de comprobar que nos lleva a una contradicción. Si  $s = 16$ ,  $p = 55$ , entonces  $m = 5$ ,  $n = 11$ , con lo que  $m^2 + n^2 = 146$ .

8. Determine la solución positiva de  $\frac{1}{x^2 - 10x - 45} + \frac{1}{x^2 - 10x - 29} = \frac{2}{x^2 - 10x - 69}$ .

(AIME, 1990)

SOLUCIÓN:

Sea  $y = x^2 - 10x - 29$ , así la ecuación dada se transforma es  $\frac{1}{y} + \frac{1}{y - 16} = \frac{2}{y - 40}$

obteniéndose de ella  $y = 10$  con lo que  $x = 13$ .

9. Los números reales  $a, b, x, y$  satisfacen  $ax + by = 3$ ,  $ax^2 + by^2 = 7$ ,  $ax^3 + by^3 = 16$ ,  $ax^4 + by^4 = 42$ .  
Determine  $ax^5 + by^5$ .

(AIME, 1990)

SOLUCIÓN:

Es necesario el siguiente truco:  $(ax^{n+1} + by^{n+1})(x + y) - (ax^n + by^n)xy = ax^{n+2} + by^{n+2}$ .

Entonces  $7(x + y) - 3xy = 16$ ,  $16(x + y) - 7xy = 42$ . Resolviendo  $x + y = -14$ ,  $xy = -38$ . Aplicando :  $ax^5 + by^5 = 42(x + y) - 16xy = 20$ .

10. Determine la suma de las raíces de  $x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001}$ .

(AIME, 2001)

**SOLUCIÓN:**

Aplicando el binomio de Newton, se tiene que el coeficiente de  $x^{2001}$  es igual a 0, el coeficiente de  $x^{2000}$  es igual a  $\frac{2001}{2}$ , el coeficiente de  $x^{1999}$  es igual a  $-250 \cdot 2001$ . Finalmente, aplicando las fórmulas de Viêta se tiene que la suma buscada es igual a 500.

**NOTAS:**

1. La fórmula del binomio de Newton corresponde a  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$ .

2. A la expresión  $\binom{n}{k}$  con  $n, k$  enteros no negativos tales que  $n \geq 0$  se le llama número

combinatorio y se define como  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

3. A la expresión  $n!$ , con  $n$  entero no negativo, se le llama factorial de  $n$  y se define como  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ ,  $0! = 1$ .

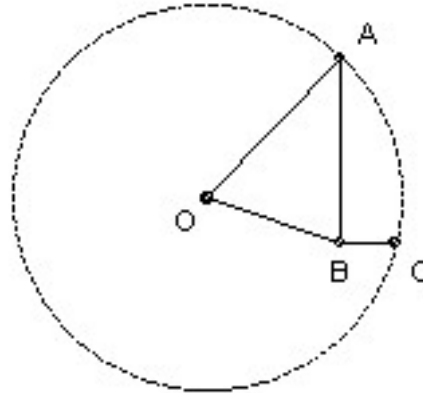
4. Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las raíces de  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  entonces

$$\square \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$\square \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

**GEOMETRÍA.**

1. Los puntos  $A$  y  $C$  están sobre la circunferencia de centro  $O$  y radio  $\sqrt{50}$ . El punto  $B$ , interior al círculo, es tal que  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 2$ . Determine  $OB$ .



(AIME, 1983)

SOLUCIÓN:

Por el teorema de Pitágoras se tiene que  $AC = 2\sqrt{10}$ . Sea  $z = x + y = \angle OAB + \angle BAC$ ,

aplicando la ley de senos al triángulo  $\Delta OAC$  tenemos  $\frac{\text{sen}(180^\circ - 2 \angle OAC)}{AC} = \frac{\text{sen}(\angle OAC)}{OC}$  de

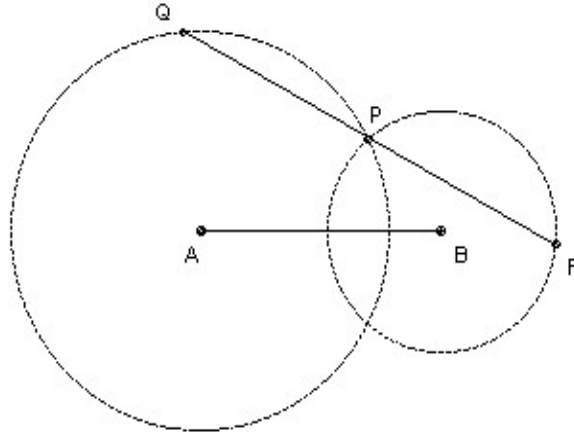
donde 
$$\frac{\text{sen}(180^\circ - 2z)}{2\sqrt{10}} = \frac{\text{sen } z}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \cos z = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \text{sen } z = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{por otro lado,}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \Rightarrow 2 = \frac{\tan x + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \tan x} \Rightarrow \tan x = 1 \text{ con lo que } \cos x = \cos \angle OAB = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y}$$

aplicando la ley de cosenos al  $\Delta OAB$  se tiene

$$OB^2 = (5\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow OB = \sqrt{26}.$$

2.  $AB = 12$ . El círculo de centro  $A$  y radio 8, y el círculo de centro  $B$  y radio 6 se intersecan en  $P$  (y otro punto). Una recta que pasa por  $P$  interseca a los círculos en  $Q$  y  $R$  (con  $Q$  en el círculo mayor), tal que  $QP = PR$ . Determine  $QP^2$ .

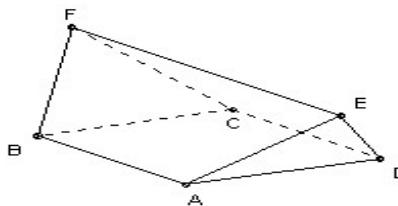


(AIME, 1983)

SOLUCIÓN:

Sea  $QP = 2a$ , trace la distancia perpendicular desde  $A$  y  $B$  hasta  $QP$ , denotemos a éstas con  $b$  y  $c$  respectivamente. Trace la recta paralela a  $QP$  que pasa por  $B$  intersectando a la mediatriz de  $QP$  en  $D$ . Consideremos el triángulo  $\triangle ADB$  entonces,  $4a^2 + (b-c)^2 = 144$ . También,  $b^2 = 64 - a^2$ ,  $c^2 = 36 - a^2$ . Con lo que  $4a^2 = 130$ , esto es  $QP^2 = 130$ .

3.  $ABCD$  es un cuadrado de lado  $6\sqrt{2}$ .  $\overline{EF}$  es paralelo al cuadrado y tiene longitud  $12\sqrt{2}$ . Las caras  $BCF$  y  $ADE$  son equiláteras. Determine el volumen del sólido  $ABCDEF$ .

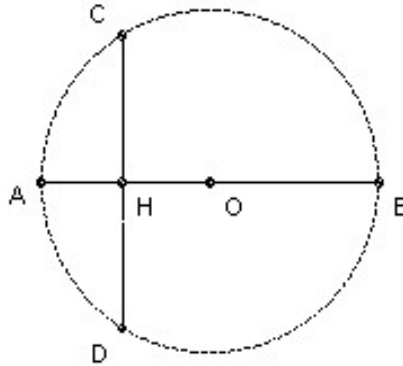


(AIME, 1983)

SOLUCIÓN:

Si tomamos  $EF$  centrado y paralelo a  $AB$ , entonces dos de tales caras pueden ser puestas juntas para formar un tetraedro regular de lado  $12\sqrt{2}$ , con lo que el volumen del sólido  $ABCDEF$  sería 288.

4. La cuerda  $CD$  es perpendicular al diámetro  $AB$  y se intersecan en  $H$ . Las distancias  $AB$  y  $CD$  son enteras. La distancia  $AB$  tiene dos dígitos y la distancia  $CD$  es obtenida invirtiendo los dígitos de  $AB$ . La distancia  $OH$  es racional. Determine  $AB$ .



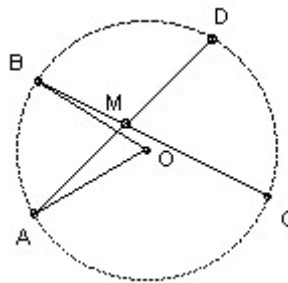
(AIME, 1983)

SOLUCIÓN: Sea  $AB = 10m + n$ ,  $CD = 10n + m$ , entonces  $OH^2 = \left(\frac{10m + n}{2}\right)^2 - \left(\frac{10n + m}{2}\right)^2$

esto es  $OH = \frac{3}{2}\sqrt{11(m+n)(m-n)}$ , así 11 divide a  $m+n$  y  $m-n$  es un cuadrado por lo que

$m = 6$ ,  $n = 5$ . Por lo tanto  $AB = 65$ .

5.  $BC$  es una cuerda de longitud 6 de un círculo de centro  $O$  y radio 5.  $A$  es un punto en la circunferencia más cercano a  $B$  que a  $C$  tal que existe una cuerda  $AD$  la cual es bisecada por  $BC$ . Determine  $\text{sen } \angle AOB$ .

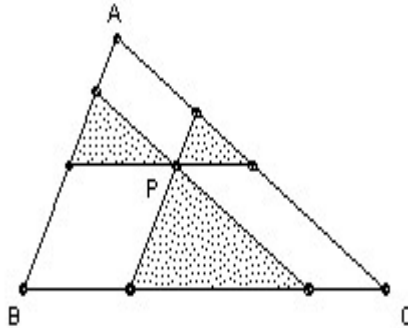


(AIME, 1983)

SOLUCIÓN:

Si  $M$  es el punto medio de  $AD$ , entonces el locus de  $M$  como de  $D$  varía como el círculo de diámetro  $AO$ . Necesitamos que éste interseque a  $BC$  entonces  $\text{sen } \angle AOB = \frac{7}{25}$ .

6.  $P$  es un punto en el interior del triángulo  $ABC$ . Se trazan tres segmentos que pasan por  $P$  y que son paralelos a los lados del triángulo. Las áreas de los tres triángulos resultantes con un vértice en  $P$  tiene áreas 4, 9 y 49. Determine el área de  $ABC$ .



(AIME, 1984)

SOLUCIÓN:

Los tres triángulos sombreados son semejantes al triángulo  $\Delta ABC$ , los lados son proporcionales a la raíz cuadrada de sus áreas, así  $BC$  es igual a la suma de los tres lados correspondientes de los triángulos sombreados, esto es  $2 + 3 + 7 = 12$  y, finalmente, el área del  $\Delta ABC$  es 144.

7. El tetraedro  $ABCD$  es tal que  $AB = 3$ ,  $(ABC) = 15$ ,  $(ABD) = 12$  y el ángulo entre las caras  $ABC$  y  $ABD$  es  $30^\circ$ . Determine su volumen.

(AIME, 1984)

SOLUCIÓN:

La altura de  $C$  sobre el triángulo  $\Delta ABD$  es  $10 \sin 30^\circ = 5$ . Así el volumen buscado es  $5 \cdot \frac{12}{3} = 20$ .

8. El triángulo ABC es tal que  $\angle B = 90^\circ$ . Cuando éste es rotado sobre AB se obtiene un cono cuyo volumen es  $800\pi$ . Cuando es rotado sobre BC se obtiene un cono cuyo volumen es  $1920\pi$ . Determine la longitud de AC.

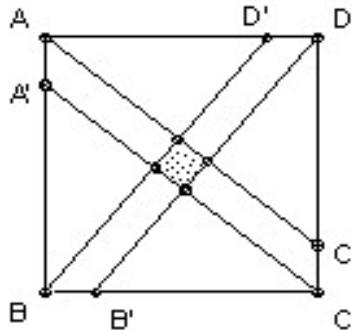
(AIME, 1985)

SOLUCIÓN:

$$\frac{AB^2 \cdot BC}{3} = 800, \frac{AB \cdot BC^2}{3} = 1920, \text{ multiplicando ambas ecuaciones y simplificando se tiene}$$

$AB \cdot BC = 240$ , así  $BC = 10$ ,  $AB = 24$ . Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene  $AC = 26$ .

9. ABCD es un cuadrado de lado 1. Los puntos A', B', C', D' son dados sobre los lados AB, BC, CD, DA respectivamente tales que  $AA'/AB = BB'/BC = CC'/CD = DD'/DA = 1/n$ . La "tira" encerrada por las líneas AC' y A'C interseca a la "tira" encerrada por las líneas BD' y B'D en un cuadrado de área  $1/1985$ . Determine n.

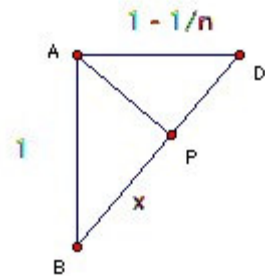


(AIME, 1985)

SOLUCIÓN:

$$AP = \sqrt{1 - x^2}, \text{ por semejanza de triángulos}$$

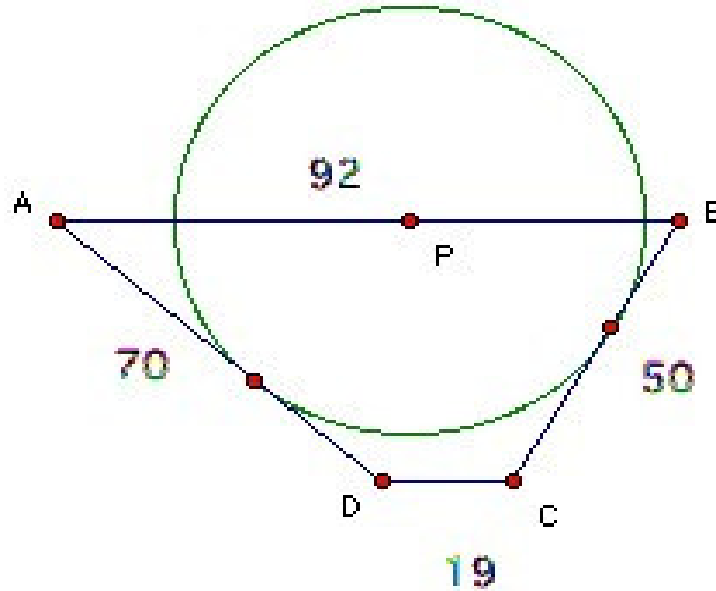
$$\text{se tiene } \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - \frac{1}{n}}. \text{ Entonces, } x = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}},$$



con lo que el lado del cuadrado pequeño es

$$\frac{x}{n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + (n - 1)^2}}. \text{ Es fácil verificar que } n^2 + (n - 1)^2 = 1985 \text{ para } n = 32.$$

10. ABCD es un trapecioide con AB paralelo a CD, AB = 92, BC = 50, CD = 19, DA = 70. P es un punto sobre el lado AB tal que un círculo con centro P es tangente a AD y BC. Determine AP.



(AIME, 1992)

SOLUCIÓN:

Prolongue AD y BC hasta que se intersequen en X. Entonces P está en la bisectriz del ángulo  $\angle AXB$ . Pero,  $\frac{AP}{PB} = \frac{AX}{BX}$ . Por semejanza de triángulos se tiene  $\frac{AX}{BX} = \frac{DX}{CX} = \frac{AD}{BD} = \frac{7}{5}$ . De

lo anterior se tiene que  $AP = \frac{7}{12} \cdot 92 = \frac{161}{3}$ .

## TEORÍA DE NÚMEROS.

1. ¿Cuál es el residuo de dividir  $6^{83} + 8^{83}$  por 49 ?

(AIME, 1983)

SOLUCIÓN:

Aplicando el binomio de Newton se tiene que:

$$6^{83} + 8^{83} = (7 - 1)^{83} + (7 + 1)^{83} = 7^2k + 7 \times 83 - 1 + 7^2m + 7 \times 83 - 1 = 7^2(k + m) + 1162$$

luego,  $6^{83} + 8^{83} = 49(k + m) + 49 \times 23 + 35$  por lo que el residuo de dividir  $6^{83} + 8^{83}$  por 49 es 35.

2. ¿Cuántos números de cuatro dígitos, cuyo dígito de las unidades de millar sea uno, tienen exactamente dos dígitos iguales ? (por ejemplo 1447, 1005 ó 1231)

(AIME, 1983)

SOLUCIÓN:

Sean  $x$ ,  $y$  dígitos diferentes de 1 y diferentes entre sí. Existen 72 números de cada una de las siguientes formas que cumplen con las condiciones del enunciado:  $1xxy$ ,  $1xyx$ ,  $1xyy$ ,  $1xy1$ ,  $1x1y$ ,  $11xy$ . Así, en total hay 432 que satisfacen las condiciones del enunciado.

3. Determine el menor entero positivo  $n$  tal que todos los dígitos del número  $15n$  sean 8 ó 0.

(AIME, 1984)

SOLUCIÓN:

$15n$  es divisible por 5, así que el último dígito debe ser 0. Este número también es divisible por 3, así que la suma de los dígitos también es divisible por 3, por lo que el número tiene al menos tres 8's, por lo tanto, el menor valor de  $15n$  es 8880 con lo que  $n = 592$ .

4. Un número “*Simpático*” se define como el producto de sus divisores propios (los divisores propios de un número son los divisores positivos de un número excluyendo al 1 y él mismo).

Determine la suma de los primeros diez números simpáticos.

(AIME, 1987)

SOLUCIÓN:

$p^n$  no es simpático para  $n \geq 3$ ,  $pq$  es número *simpático*.  $p^2q$  no es simpático ni  $p^3q$  ni  $pqr$ .

Así, los primeros 10 números simpáticos son: 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27, y 33 por lo que la suma de ellos es 182.

5. Determine el mayor entero  $k$  tal que  $3^{11}$  es la suma de  $k$  enteros positivos consecutivos.

(AIME, 1987)

SOLUCIÓN:

Tome los números  $N + 1, N + 2, \dots, N + k$ . Así  $k(2N + k + 1) = 2 \cdot 3^{11}$ . Desde que  $N \geq 0$ , tenemos  $k < 2N + k + 1$ , y entonces  $k < (2 \cdot 3^{11})^{1/2}$ . Por lo anterior,  $k$  divide a  $2 \cdot 3^{11}$ . El mayor de tales  $k$  es, obviamente,  $2 \cdot 3^5 = 486$ .

## FUNCIONES O SUCESIONES.

1. Sean  $x_1=97, x_2=\frac{2}{x_1}, x_3=\frac{3}{x_2}, x_4=\frac{4}{x_3}, \dots, x_8=\frac{8}{x_7}$ . Determine  $x_1x_2\cdots x_8$ .

(AIME, 1985)

SOLUCIÓN:

$x_1x_2 = 2, x_3x_4 = 4, x_5x_6 = 6, x_7x_8 = 8$ . Multiplicando se obtiene  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 = 384$ .

2. La sucesión  $a_1, a_2, \dots, a_{98}$  satisface  $a_{n+1} = a_n + 1$  para  $n = 1, 2, \dots, 97$  y su suma es 137.

Determine  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{98}$ .

(AIME, 1984)

SOLUCIÓN:

De acuerdo con el enunciado  $a_2 = a_1 + 1, a_3 = a_2 + 1 = a_1 + 2, a_4 = a_3 + 1 = a_1 + 3$  y, en general, se tiene que  $a_n = a_1 + n$ . Entonces  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{98} = 137$  con lo que  $98a_1 + 97 \cdot 98/2 = 137$  de aquí que  $49a_1 = 137/2 - 97 \cdot 49/2$ . Por otro lado,  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{98} = 49a_1 + 49 \cdot 98/2 = 137/2 - 97 \cdot 49/2 + 49 \cdot 98/2 = 93$ .

3. La sucesión  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  tiene la propiedad de que, para cada  $k, x_k$  es  $k$  veces menor que la suma de los otros 99 números. Determine  $x_{50}$ .

(AIME, 2000)

SOLUCIÓN:

Sea  $s = x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$ . Entonces  $2x_k = s - k$ . Sumando,  $s = 50s - \frac{1+2+\dots+100}{2}$ , así  $s = \frac{25 \cdot 101}{49}$ . Con lo que  $2x_{50} = \frac{25 \cdot 101}{49} - 50$  y, finalmente, despejando se tiene  $x_{50} = \frac{75}{98}$ .

4. La función  $f$  satisface  $f(x) + f(x-1) = x^2$  para todo  $x$ , si  $f(19) = 94$ , determine el residuo de  $f(94)$  cuando es dividido por 1000.

(AIME, 1994)

SOLUCIÓN:

$f(94) = 94^2 - f(93) = 94^2 - 93^2 + f(92) = 94^2 - 93^2 + 92^2 - f(91) = \dots = (94^2 - 93^2) + (92^2 - 91^2) + \dots + (22^2 - 21^2) + 20^2 - f(19) = 94 + 93 + \dots + 21 + 400 - 94 = 115 \cdot 37 + 306 = 4561$ . Por lo anterior, el residuo de  $f(94)$  cuando es dividido por 1000 corresponde a 561.

5. La función  $f(m, n)$  definida para enteros positivos  $m, n$  satisface

$$\begin{cases} f(m, m) = m \\ f(m, n) = f(n, m) \\ f(m, m+n) = \left(1 + \frac{m}{n}\right) f(m, n) \end{cases}$$

Determine  $f(14, 52)$ .

(AIME, 1988)

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} f(14, 52) &= \frac{26}{19} f(14, 38) = \left(\frac{26}{19}\right) \left(\frac{19}{12}\right) f(14, 24) = \left(\frac{26}{19}\right) \left(\frac{12}{5}\right) f(14, 10) = \left(\frac{26}{5}\right) \left(\frac{7}{2}\right) f(10, 4) = \left(\frac{91}{5}\right) \\ &\left(\frac{5}{3}\right) f(4, 6) = \left(\frac{91}{3}\right) 3 f(4, 2) = 91 \cdot 2 f(2, 2) = 91 \cdot 2 \cdot 2 = 364. \end{aligned}$$

## Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna consistirá en 30 ejercicios propuestos que se separarán por categorías (Álgebra, Geometría, Teoría de Números y Funciones o Sucesiones) y de menor a mayor nivel de dificultad. Es importante destacar que el **nivel de dificultad** en que se ordenarán los ejercicios de cada categoría es valorado por nosotros (los editores) de acuerdo a criterios establecidos pero ello no significa que esta valoración pueda ser diferente para el estimable lector.

Por otro lado, la solución de los mismos se presentará hasta la próxima edición con la finalidad de que nuestros lectores participen activamente enviándonos soluciones y / o comentarios que puedan enriquecer la discusión de cada ejercicio. Sin embargo, de no darse esa participación en algunos ejercicios, se publicará, al menos, una solución oficial brindada por los encargados de esta sección.

### ÁLGEBRA.

1. Si  $r_1, r_2, r_3, r_4$  son las raíces de  $2x^4 - 3x^2 - 14x + 17 = 0$  determine el valor numérico de  $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$ .

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

2. Determine el valor de:  $\log_2 [\text{sen}(6^\circ) \text{sen}(42^\circ) \text{sen}(45^\circ) \text{sen}(66^\circ) \text{sen}(78^\circ)]$ .

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

3. Sea la operación  $*$  definida por  $a * b = a^2 + 3^b$ . Determine el valor de  $(2 * 0) * (0 * 1)$ .

(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

4. Si  $x + \frac{1}{x} = 2$ , entonces determine el valor numérico de  $x^6 + \frac{1}{x^6}$ .

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

5. Las longitudes de los lados de un triángulo son las tres raíces distintas de la ecuación:

$$4x^3 - 24x^2 + 47x - 30 = 0.$$

Determine el área del triángulo.

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

6. Si  $a \neq b$  y  $\left(\frac{a(1-b)}{b(1-a)}\right)^2 = 1$ , determine el valor de  $\frac{a+b}{ab}$ .

(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

7. Si  $a, b$  y  $c$  denotan las soluciones de la ecuación  $x^3 - 2x^2 - 5x + 8 = 0$ , determine el valor de

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}.$$

(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

8. Determine  $\left\lfloor \frac{2007! + 2004!}{2006! + 2005!} \right\rfloor$  donde  $\lfloor x \rfloor$  denota el mayor entero menor o igual que  $x$ .

(10<sup>th</sup> Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, 2007)

9. Dos números reales  $x$  y  $y$  son tales que  $x - y = 4$  y  $x^3 - y^3 = 28$ . Determine el valor de  $xy$ .

(10<sup>th</sup> Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, 2007)

10. Tres números reales  $x, y, z$  son tales que  $\frac{x+4}{2} = \frac{y+9}{z-3} = \frac{x+5}{z-5}$ . Determine el valor de  $\frac{x}{y}$ .

(10<sup>th</sup> Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, 2007)

## GEOMETRÍA.

1. En el triángulo rectángulo ABC, la longitud del cateto AB es 29. Si las otras dos longitudes son enteras positivas y el perímetro del triángulo es divisible por 29, entonces determine el valor de

$$\frac{\text{perímetro del } \Delta ABC}{29}$$

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

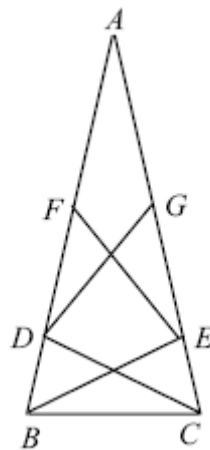
2. El diámetro AB y la cuerda CD se intersecan en el interior del círculo en E.  $AE = AC$ , y la medida de los  $\angle ACB$  y  $\angle CBD$  están en la razón 5 a 4. Determine la medida en grados del arco BD.

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

3. Los triángulos rectángulos AXY y BXY tienen la hipotenusa común XY. Al prolongar AY y BX éstos se intersecan en el punto Z. Si  $AX = 1$ ,  $AY = 8$ ,  $BX = 7$  y  $BY = 4$ , entonces determine el área del triángulo XYZ.

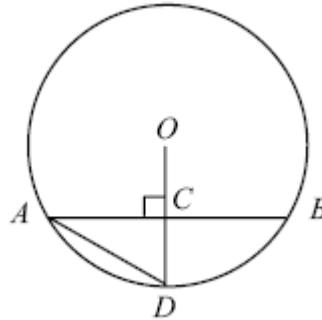
(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

4. El  $\Delta ABC$  es isósceles y  $AF = AG = FE = GD = DC = EB = BC$ . Determine  $m \angle A$ .



(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

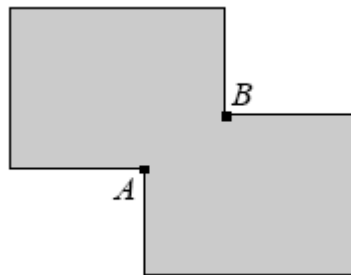
5.  $O$  es el centro del círculo que se muestra en la figura siguiente.



$OC = 3$  y  $AD = 36$ . Determine la medida de  $CD$ .

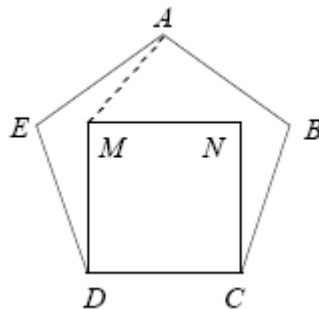
(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

6. Dos rectángulos de  $3 \times 4$  son superpuestos de tal manera que sus lados son perpendiculares. Si el área y el perímetro del área sombreada son 22 y 20 respectivamente, determine la medida de  $AB$ .



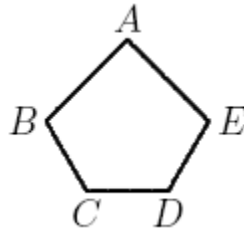
(Manhattan Mathematics Contest, 2006 )

7. Si  $ABCDE$  es un pentágono regular y  $MNCD$  es un cuadrado, determine el valor de  $m \angle AMN - m \angle EAM$ .



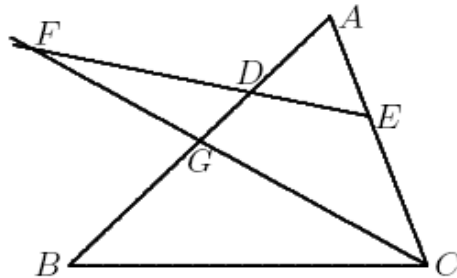
(Manhattan Mathematics Contest, 2006 )

8. El pentágono ABCDE tiene un ángulo recto en A,  $AB = AE$ , y  $ED = DC = CB = 1$ . Si  $BE = 2$  y es paralelo a CD, determine el área del pentágono.



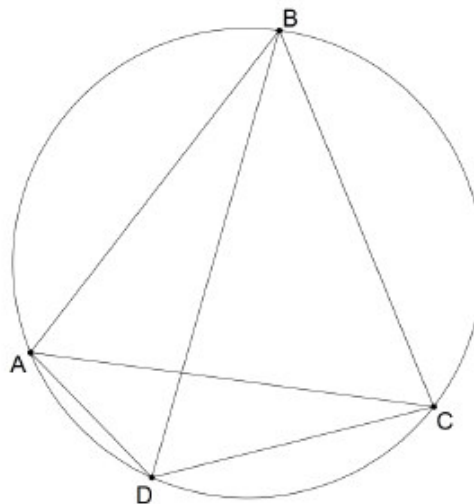
(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

9. En la siguiente figura,  $AD = AE$ , y F es la intersección de la prolongación de ED con la bisectriz del ángulo C. Si  $\angle B = 40^\circ$ , determine la medida del ángulo  $\angle CFE$ .



(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2004)

10. El cuadrilátero convexo ABCD tiene longitudes  $AB = BC = 7$ ,  $CD = 5$ , y  $AD = 3$ . Además,  $m \angle ABC = 60^\circ$ , determine BD.



(10<sup>th</sup> Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, 2007)

## **TEORÍA DE NÚMEROS.**

1. ¿ Cuántos números enteros con cuatro diferentes dígitos entre 1000 y 9999 son tales que el valor absoluto de la diferencia del primer dígito y el último es 2 ?

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

2. Si cada uno de los cuatro números es sumado al promedio de los otros tres, las respectivas sumas son 10, 16, 30 y 36. Calcule el valor de los cuatro números y lístelos en orden ascendente.

(Polya Mathematics Competition, Education Program for Gifted Youth, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

3. Determine todas las posibles parejas de enteros positivos  $(m, n)$ ,  $m < n$ , para los cuales

$$m + (m + 1) + (m + 2) + \dots + n = 54$$

(Polya Mathematics Competition, Stanford University Department of Mathematics, 1994 )

4. Determine todos los números primos de dos dígitos tales que la suma de sus dígitos es también un número primo de dos dígitos.

(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

5. Si  $AB_7 = BA_5$ , con A y B diferentes de cero, determine todas las parejas ordenadas  $(A, B)$  que satisfacen las condiciones enunciadas.

(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

## **FUNCIONES O SUCESIONES.**

1. Sea  $f$  una función tal que  $f(x) = x f(x - 1)$  para todo  $x$  y  $f(3)$  es la media aritmética entre  $f(2)$  y  $f(4)$ . Determine el valor exacto de  $\ln\left(5e^{f(3)}\right)$ .

(New England Association of Mathematics Leagues, New England Playoffs, 2003)

2. Sea  $f$  una función cuadrática con discriminante 4. Uno de los ceros (raíces de  $f(x) = 0$ ) de la función es 6 y  $f(0) = 6$ . Determine todas las funciones caracterizadas por la información dada.

(New England Association of Mathematics Leagues, New England Playoffs, 1973)

3. Iniciando con  $q_1 = 2x^2 - 6x + 3$ , una sucesión de expresiones cuadráticas se forma de modo que los ceros de  $q_n$  son el doble de los ceros de  $q_{n-1}$  para  $n \geq 2$ . Si  $q_7 = x^2 - bx + c$ , determine  $(b, c)$ .

(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

4. Sea  $R$  la región del primer cuadrante encerrada por los ejes  $X$  e  $Y$  y las gráficas de  $f(x) = \frac{9}{25}x + b$  y  $f^{-1}(x)$ . Si el área de  $R$  es 49, determine el valor de  $b$ .

(Massachusetts Association of Mathematics Leagues, State Playoffs, 2003)

5. Sea  $a_1 = 20$  y  $a_2 = 3$ . Para  $n \geq 1$ , se define  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ . Determine el residuo cuando  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2003}^2$  es dividido por 8.

(Lehigh University High Scholl Math Contest, 2003)

#### **4. CURIOSATO.**

Miguel Ángel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna tiene como finalidad mostrar ejercicios de preparación o competencia olímpicas en fases iniciales que se desarrollan en otros países.

Estos tipos de ejercicios son de selección única y se procurará brindar la solución de todos los ejercicios que se propongan. Es importante hacer notar que los mismos pueden servir de preparación para estudiantes que participan en los distintos niveles de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Continuamos con ejercicios correspondientes a los Problemas Introdutorias de la Olimpiada Sonorense de Matemática, estado de la República de México.

**Problema 101.** Para cada dos números enteros  $a$  y  $b$  se define la operación  $*$  de la manera siguiente:  $a*b = ab + 2$ . ¿Cuál es el valor de  $((1*1)*1*...*1)*1$  donde se han utilizado mil unos?

- (a) 1000                      (b) 1001                      (c) 1999                      (d) 2001

**Problema 102.** ¿Cuántos números enteros hay entre  $999^2$  y  $1000^2$ , sin incluir estos dos números?

- (a) 999                      (b) 1000                      (c) 1998                      (d) 1999

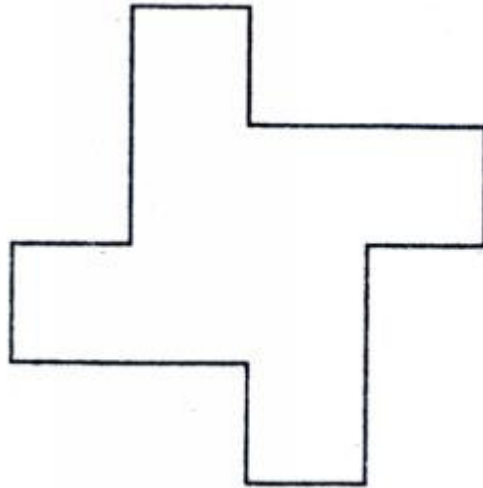
**Problema 103.** En un cuadrado  $ABCD$  de lado 1,  $E$  es el punto medio de la diagonal  $BD$  y  $F$  punto medio de  $ED$ . ¿Cuál es el área del triángulo  $CFD$ ?

- (a)  $\frac{3}{8}$                       (b)  $\frac{1}{12}$                       (c)  $\frac{1}{2}$                       (d)  $\frac{1}{8}$

**Problema 104.** La suma de todos los dígitos del número  $10^{99} - 99$  es:

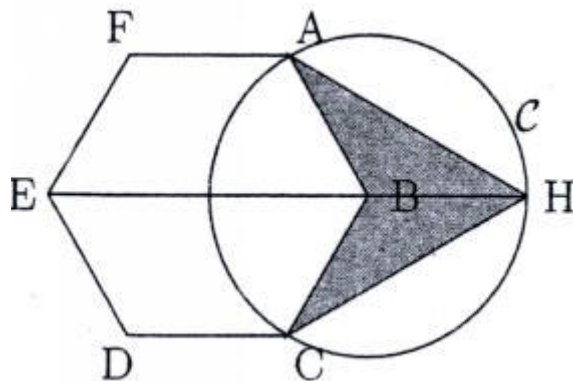
- (a) 873                      (b) 874                      (c) 879                      (d) 899

**Problema 105.** En la siguiente figura los lados grandes y chicos son todos iguales entre si. Los lados chicos miden la mitad de los grandes. Todos los ángulos son rectos y el área de la figura es 200. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



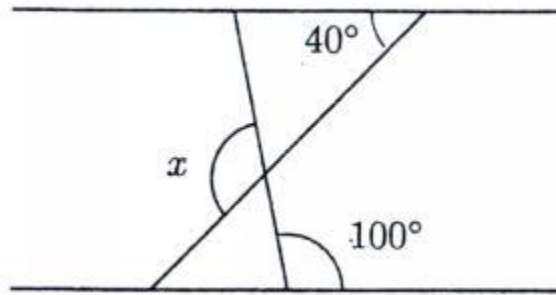
- (a) 20                      (b) 40                      (c) 60                      (d) 80

**Problema 106.** En la figura,  $ABCDEF$  es un hexágono regular y  $C$  es un círculo con centro en  $B$ . La razón del área sombreada entre el área del hexágono es:



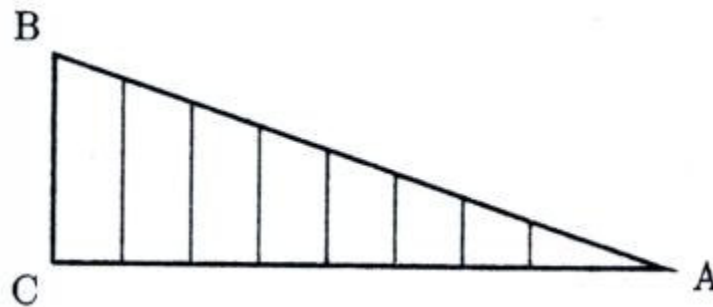
- (a)  $\frac{1}{3}$                       (b)  $\frac{2}{3}$                       (c)  $\frac{3}{4}$                       (d)  $\frac{4}{5}$

**Problema 107.** ¿Cuánto vale el ángulo  $x$ , si las rectas horizontales son paralelas?



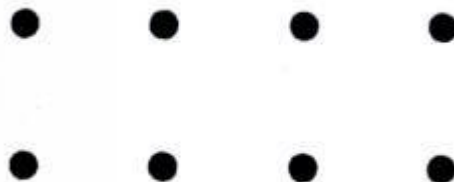
- (a)  $120^\circ$                       (b)  $130^\circ$                       (c)  $140^\circ$                       (d)  $150^\circ$

**Problema 108.** El lado  $AC$  de un triángulo  $ABC$  se divide en 8 partes iguales. Siete segmentos de recta paralelos a  $BC$  se dibujan desde los puntos de división. Si  $BC = 10$ , ¿Cuánto mide la suma de las longitudes de los 7 segmentos?



- (a) 35                                  (b) 70                                  (c) 80                                  (d) 89

**Problema 109.** Con vértices en los puntos de la figura, ¿Cuántos cuadriláteros se pueden dibujar?



- (a) 4                                      (b) 16                                      (c) 24                                      (d) 36

**Problema 110.** Empiezas con el número 1. Una "operación" consiste en multiplicar el número por 3 y sumarle 5. ¿Cuál es la cifra de las unidades después de aplicar la operación 1999 veces?

- (a) 1                      (b) 2                      (c) 8                      (d) 9

**Problema 111.** Elena, en los primeros tres exámenes sacó 6, 7 y 9. ¿Cuánto tiene que sacar en el cuarto examen para sacar 8 de promedio entre los cuatro exámenes?

- (a) 7                      (b) 8                      (c) 9                      (d) 10

**Problema 112.** Considera una fila de 5 sillas numeradas del 1 al 5. Siéntate en la silla número 1. Un movimiento consta de pararte y sentarte en una de las sillas que tengas junto. Si estás en la silla 1 sólo puedes sentarte en la silla número 2, análogamente, si estás en la silla 5 sólo puedes sentarte en la silla 4, pero si estás en cualquier otra silla tienes dos posibilidades. Realiza 19 movimientos, luego elimina la silla 1 y 5 y finalmente haz 99 movimientos más. ¿En qué silla acabarás sentado?

- (a) 2      (b) 3      (c) 4      (d) No se puede determinar

**Problema 113.** Cada movimiento en un juego consiste de invertir 2 flechas adyacentes, si la posición inicial es



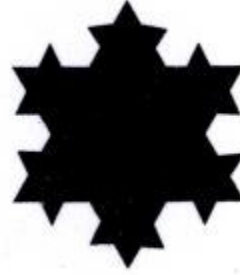
y la posición final es



¿Cuál es el número mínimo de movimientos para llegar a esta posición final?

- (a) 1                      (b) 2                      (c) 3                      (d) 4

**Problema 114.** La primera figura tiene 3 lados y 3 picos, la segunda tiene 12 lados y 6 picos, la tercera tiene 48 lados y 18 picos y así sucesivamente. ¿Cuántos picos tendrá la quinta figura?

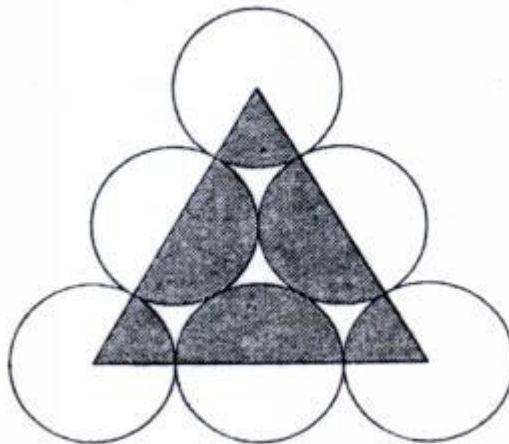


- (a) 258                      (b) 384                      (c) 768                      (d) 66

**Problema 115.** Se tiene un cubo de lado 5 formado por cubitos de lado 1. ¿Cuántos cubitos quedan totalmente ocultos a la vista?

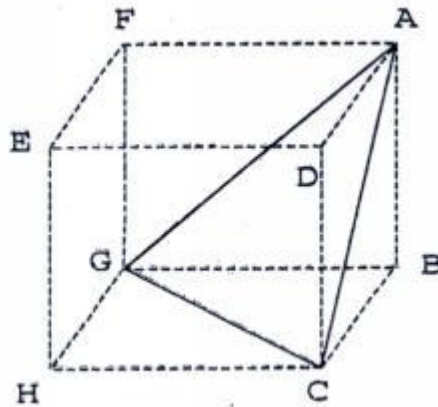
- (a) 25                      (b) 27                      (c) 10                      (d) 15

**Problema 116.** En la siguiente figura, los círculos son tangentes (se tocan en un solo punto), todos los círculos son del mismo tamaño y tiene radio igual a 2. Encontrar el área de la región sombreada.



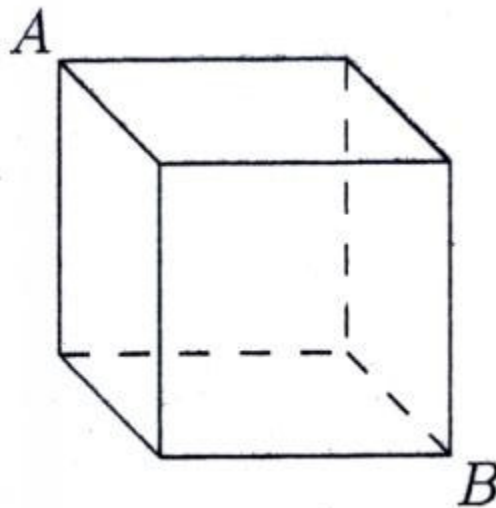
- (a)  $2\pi$                       (b)  $4\pi$                       (c)  $6\pi$                       (d)  $8\pi$

**Problema 117.** Un cubo de madera se corta con una sierra por los puntos  $A$ ,  $C$  y  $G$ , como se indica en la figura. ¿Cuánto vale el ángulo  $CAG$ ?



- (a)  $45^\circ$                       (b)  $90^\circ$                       (c)  $60^\circ$                       (d)  $30^\circ$

**Problema 118.** En el siguiente cubo, ¿de cuántas formas se puede ir de  $A$  a  $B$  sobre las aristas sin pasar dos veces por el mismo vértice y sin subir?



- (a) 10                      (b) 11                      (c) 12                      (d) 13

**Problema 119.** ¿Cuántos números enteros positivos  $n$  satisfacen la desigualdad

$$\frac{2}{5} < \frac{n}{17} < \frac{11}{13}$$

- (a) 6                      (b) 10                      (c) 8                      (d) 5

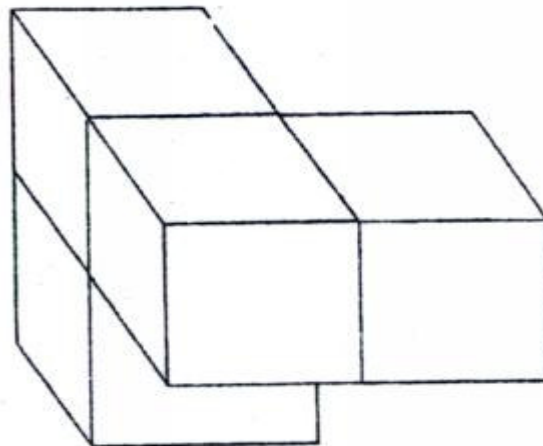
**Problema 120.** Si un cubo de arista igual a 5 se parte en cubos de arista igual a 1, entonces la suma de las longitudes de todas las aristas de todos los nuevos cubos es:

- (a) 300                      (b) 400                      (c) 2000                      (d) 1500

**Problema 121.** Sea  $ABCD$  un cuadrado con los lados de longitud 9. ¿Cuántos puntos (dentro o fuera del cuadrado) son equidistantes de  $B$  y  $C$  y están exactamente a una distancia 6 del punto  $A$ ?

- (a) 1                      (b) 2                      (c) 5                      (d) más de 5

**Problema 122.** ¿Cuánto mide la superficie de la siguiente figura formada con cubos de lado 1?



- (a) 18                      (b) 16                      (c) 14                      (d) 12

**Problema 123.** Un cuadrado tiene perímetro  $P$  y área  $Q$ . Dada la ecuación  $3P = 2Q$ , determina el valor de  $P$

- (a) 10                      (b) 12                      (c) 24                      (d) 36

**Problema 124.** El 70% de los habitantes de un país habla un idioma y el 60% de la misma población habla otro idioma. ¿Qué porcentaje de la población habla los 2 idiomas, sabiendo que cada habitante habla al menos uno de ellos?

- (a) 70%                      (b) 60%                      (c) 30%                      (d) 10%

**Problema 125.** Dados dos números  $a$  y  $b$  definimos la operación  $\S$  de la manera siguiente:  $a \S b = a + b + ab$ .

El valor de  $1 \S \frac{1}{2} \S \frac{1}{3} \S \dots \S \frac{1}{1999}$  es:

- (a)  $\frac{1000}{1999}$                       (b) 1999                      (c)  $1000 + \frac{1}{1999}$                       (d) 2000

## 5. Solución al *CURIOSATO*

Miguel Ángel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

A continuación brindamos las alternativas que son las respuestas al *CURIOSATO* de esta edición.

Nos permitimos solicitarles elaboren sus propias soluciones a esta columna solamente tomando como guía la tabla de respuestas siguientes

101.- (c)	106.- (a)	111.- (d)	116.- (d)	121.- (b)
102.- (c)	107.- (a)	112.- (b)	117.- (c)	122.- (a)
103.- (d)	108.- (a)	113.- (c)	118.- (c)	123.- (c)
104.- (b)	109.- (d)	114.- (a)	119.- (c)	124.- (c)
105.- (d)	110.- (b)	115.- (b)	120.- (d)	125.- (b)

## **6. Solución a los problemas anteriores de la columna “Olimpiadas alrededor del mundo”.**

Randall Godínez.

Arlene Martínez.

Melissa Ramírez.

Carlos Rodríguez.

Presentamos, a continuación, la solución de los diez problemas presentados en esta misma columna pero de la edición anterior. Hemos procurado adjuntar varias soluciones a los problemas con el fin de hacer notar que los mismos pueden ser enfocados y resueltos de diversas formas y que ello es lo que se busca en las competencias olímpicas: favorecer el pleno desarrollo de la creatividad del participante al momento de enfrentar los problemas y de ninguna manera encajonar su pensamiento.

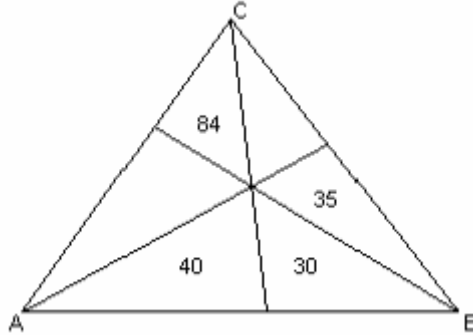
Al mismo tiempo que se presenta una solución a determinado problema se advierte, cuando ello lo amerita, la teoría que se está aplicando en la solución del mismo con el fin de que se cuente con todo el marco teórico que se requiera para poder resolver otros problemas que puedan ubicarse en la misma categoría o bien que puedan reducirse a ellos.

Cuando se indique que la solución es oficial lo que se pretende indicar es que esa es la solución que se dio en la competencia señalada por parte del comité organizador o bien de su proponente.

Recuérdese que ningún problema está completamente cerrado por lo que se les solicita a nuestros estimables lectores que nos envíen sus comentarios o sugerencias que tengan a esta columna en particular mediante alguno de los correos indicados en la presentación.

Pues bien, veamos las soluciones de la columna anterior !!

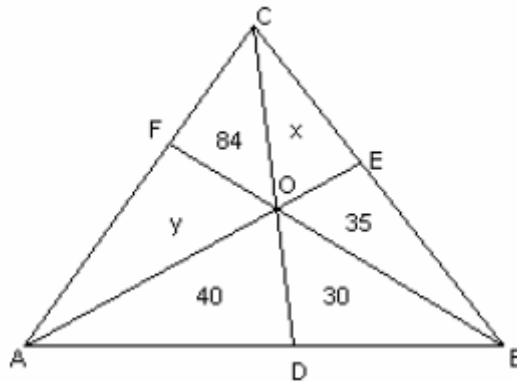
1. El triángulo ABC esta dividido en seis triángulos más pequeños por rectas que pasan por los vértices y por un punto común en el interior del triángulo. Las áreas de cuatro de estos triángulos están indicadas. Calcular el área del triángulo ABC.



(XV Olimpiada Nacional de Matemática, Ronda Final - Nivel 3, Paraguay, 2003)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Consideremos la siguiente figura:



Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces sus áreas son proporcionales a sus respectivas bases. Considerando los triángulos AOD y DOB tenemos:

$$\frac{40}{30} = \frac{AD}{DB} \quad (\alpha)$$

Considerando las igualdades  $\alpha$  y  $\beta$  tenemos: 
$$\frac{40}{30} = \frac{40 + y + 84}{30 + 35 + x} \quad (1)$$

En los triángulos ACD y DCB tenemos: 
$$\frac{40 + y + 84}{30 + 35 + x} = \frac{AD}{DB} \quad (\beta)$$

De forma análoga se obtiene: 
$$\frac{35}{x} = \frac{35 + 30 + 40}{x + 84 + y} \quad (2)$$

$$\frac{84}{y} = \frac{84 + x + 35}{y + 40 + 30} \quad (3)$$

De la igualdad 1 resulta:  $4x - 3y = 112$

De la igualdad 2 tenemos:  $2x - y = 84$

Resolviendo el sistema, obtenemos:  $x = 70$  ;  $y = 56$

Entonces:  $(ABC) = 84 + 56 + 40 + 70 + 35 + 30$

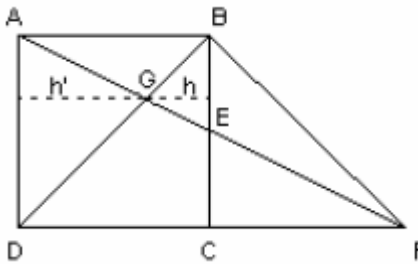
$$(ABC) = 315$$

2. En un cuadrado ABCD, E es el punto medio del lado BC. La recta AE corta a la recta DC en F y a la diagonal BD en G. Si el área (EFC) = 8, determinar el área (GBE).

(XV Olimpiada Nacional de Matemática, Ronda Final - Nivel 3, Paraguay, 2003)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Consideremos la siguiente figura:



Trazamos BF. Los triángulos BEF y EFC tienen iguales sus áreas por tener iguales las bases y las alturas. Luego:  $(BEF) = 8$ . Entonces, el área del triángulo BCF es:  $(BCF) = 8 + 8 = 16$ . Como EC es paralela a AD y E es el punto medio de BC, C es también el punto medio de DF y  $DC = CF$ . Los triángulos DBC y BCF tienen iguales sus bases y la misma altura. Luego:  $(BCD) = (BCF) = 16$ . También tienen igual área los triángulos ADB y BCD. Luego el área del cuadrado es:  $(ABCD) = 16 + 16 = 32$ .

Entonces, el lado del cuadrado es:

$$l = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Los triángulos ADG y BGE son semejantes por tener iguales sus ángulos. Sean h y h' las alturas de los triángulos BGE y ADG respectivamente. Entonces:

$$\frac{AD}{h'} = \frac{BE}{h}$$

Como  $AD = 2 BE$ , tenemos:

$$\frac{2BE}{h'} = \frac{BE}{h} \Rightarrow h' = 2h$$

Siendo  $(h + h')$  equivalente al lado del cuadrado, tenemos:

$$h + h' = 4\sqrt{2} \Rightarrow 3h = 4\sqrt{2} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

El área buscada es:

$$(GBE) = \frac{BE \cdot h}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3}}{2}$$

$$(GBE) = \frac{8}{3}$$

3. Hallar todos los p primos tales que  $5^p + 4p^4$  es cuadrado perfecto.

(Olimpiada de Matemática del Uruguay, Instancia Final, Quinto Nivel, 29 de octubre de 2006)

**SOLUCIÓN OFICIAL:**

De acuerdo con el enunciado se tiene que

$$5^p + 4p^4 = n^2 \Rightarrow 5^p = (n - 2p^2)(n + 2p^2)$$

de aquí se deben analizar los dos siguientes casos:

**I CASO**

$$\begin{cases} n - 2p^2 = 5^j \\ n + 2p^2 = 5^k \end{cases} \Rightarrow 4p^2 = 5^k - 5^j \Rightarrow p = 5 \Rightarrow p = 5$$

comprobando este resultado tendremos:  $5^5 + 4 \times 5^4 = 5^4 \times 9 = 75^2$ .

**II CASO**

$$\begin{cases} n - 2p^2 = 1 \\ n + 2p^2 = 5^p \end{cases} \Rightarrow 4p^2 = 5^p - 1 \Rightarrow 1 = 5^p - 4p^2 \equiv 5 \pmod{p} \Rightarrow 5 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p = 2$$

comprobando este resultado tendremos:  $2^5 + 4 \times 2^4 = 2^4 \times 6 \neq n^2$ .

Por tanto, el único  $p$  es 5.

4. Determinar todas las  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen la ecuación:

$$f(x) + 8f\left(\frac{1}{x}\right) = -63x$$

(Olimpiada de Matemática del Uruguay, Instancia Final, Quinto Nivel, 29 de octubre de 2006)

SOLUCIÓN OFICIAL:

De acuerdo con el enunciado se tiene que:

$$\begin{cases} f(x) + 8f\left(\frac{1}{x}\right) = -63x \\ -8f\left(\frac{1}{x}\right) - 64f(x) = \frac{63 \times 8}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -63f(x) = -63x + \frac{63 \times 8}{x} \Rightarrow f(x) = x - \frac{8}{x}$$

5. Sean  $a$  y  $b$  enteros. Demostrar que la ecuación  $(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$  admite a lo sumo una solución entera.

(XLI Olimpiada Matemática Española, Fase nacional 2005, Primera sesión, 21 de marzo)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Sea el entero  $p$  una raíz, entonces:  $(x-a)(x-b)(x-3)+1$  se anula para  $x = p$ , es decir

$$(p-a)(p-b)(p-3) = -1$$

Distingamos varios casos

1.-  $(p-3)=1 \Rightarrow p=4$

entonces para los otros factores tenemos dos posibilidades:

$$\left. \begin{array}{l} (p-a) = -1 \Rightarrow a = p+1 = 5 \\ (p-b) = 1 \Rightarrow b = p-1 = 3 \end{array} \right\} \text{sustituyendo queda la ecuación}$$

$$(x-3)^2(x-5)+1 = x^3 - 11x^2 + 39x - 44 = 0$$

y una vez separada la raíz 4 resulta la ecuación  $x^2 - 7x + 11 = 0$  que no tiene raíces enteras.

$$\left. \begin{array}{l} (p-a) = 1 \Rightarrow a = p-1 = 3 \\ (p-b) = -1 \Rightarrow b = p+1 = 5 \end{array} \right\} \text{idéntico al anterior.}$$

2.-  $(p-3) = -1 \Rightarrow p = 2$

entonces para los otros factores tenemos dos posibilidades:

$$\left. \begin{array}{l} (p-a) = 1 \Rightarrow a = p-1 = 1 \\ (p-b) = 1 \Rightarrow b = p-1 = 1 \end{array} \right\} \text{sustituyendo queda la ecuación}$$

$$(x-1)^2(x-3)+1 = x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$$

y después de separar la raíz 2 resulta  $x^2 - 3x + 1 = 0$  que no tiene raíces enteras.

Finalmente,

$$\left. \begin{array}{l} (p-a) = -1 \Rightarrow a = p+1 = 3 \\ (p-b) = -1 \Rightarrow b = p+1 = 3 \end{array} \right\} \text{sustituyendo queda la ecuación}$$

$$(x-3)^3 + 1 = x^3 - 9x^2 + 27x - 26 = 0$$

y después de separar la raíz 2 resulta  $x^2 - 7x + 13 = 0$  que no tiene raíces.

6. Se representa por  $Z$  el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones  $f : Z \rightarrow Z$ , tales que para cualesquiera  $x, y$  enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

(XL Olimpiada Matemática Española, Fase nacional 2004, Primera sesión, 26 de marzo)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Primeramente observemos que  $f(x + nf(y)) = f(x) - ny$ .

Para  $n = 0$  es obvio, y por inducción suponiendo que para cada entero  $n \geq 1$

$$f(x + (n-1)f(y)) = f(x) - (n-1)y,$$

entonces:

$$\begin{aligned} f(x + nf(y)) &= f(x + (n-1)f(y) + f(y)) = f(x + (n-1)f(y)) - y = \\ &= f(x) - (n-1)y - y = f(x) - ny. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba para cada entero  $n \leq -1$ .

Por tanto

$$f(1 + f(1) \cdot f(1)) = 0.$$

Poniendo  $k = 1 + f(1) \cdot f(1) = 1 + f(1)^2 > 0$ , se tiene  $f(x) = f(x + f(k)) = f(x) - k$ , que es una contradicción.

Deducimos que no existen funciones que satisfagan la condición requerida.

7. Se consideran los enteros positivos

$$S_d = 1 + d + d^2 + \dots + d^{2006},$$

con  $d = 0, 1, 2, \dots, 9$ . Halle la última cifra del número

$$S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_9.$$

(VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, Panamá, 2006)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Denotaremos por  $\mathcal{U}(S_d)$  a la última cifra del número  $S_d$ , se obtiene inmediatamente que  $\mathcal{U}(S_0) = \mathcal{U}(1) = 1$  y  $\mathcal{U}(S_1) = \mathcal{U}(1 + 2006) = 7$ . Para calcular los restantes  $\mathcal{U}(S_d)$  observamos que para todo  $k \in \mathbb{N}$ , es

$$U(d^{4k} + d^{4k+1} + d^{4k+2} + d^{4k+3}) = 0$$

excepto para  $d = 6$ . En este caso es

$$U(6^{5k} + 6^{5k+1} + 6^{5k+2} + 6^{5k+3} + 6^{5k+4}) = 0.$$

Explícitamente:

$$\begin{aligned} U(S_2) &= U[1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + (2^{2001} + \dots + 2^{2004}) + 2^{2005} + 2^{2006}] \\ &= U(1 + 0 + \dots + 0 + 2 + 4) = 7 \\ U(S_3) &= U[1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + (3^{2001} + \dots + 3^{2004}) + 3^{2005} + 3^{2006}] \\ &= U(1 + 0 + \dots + 0 + 3 + 9) = 3, \\ U(S_4) &= U[1 + (4 + 4^2 + 4^3 + 4^4) + \dots + (4^{2001} + \dots + 4^{2004}) + 4^{2005} + 4^{2006}] \\ &= U(1 + 0 + \dots + 0 + 4 + 6) = 1, \\ U(S_5) &= U[1 + (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + \dots + (5^{2001} + \dots + 5^{2004}) + 5^{2005} + 5^{2006}] \\ &= U(1 + 0 + \dots + 0 + 5 + 5) = 1, \\ U(S_6) &= U[1 + (6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5) + \dots + (6^{2001} + \dots + 6^{2004} + 6^{2005}) + 6^{2006}] \\ &= U(1 + 0 + \dots + 0 + 0 + 6) = 7, \\ U(S_7) &= U[1 + (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \dots + (7^{2001} + \dots + 7^{2004}) + 7^{2005} + 7^{2006}] \\ &= U(1 + 0 + \dots + 0 + 7 + 9) = 7, \\ U(S_8) &= U[1 + (8 + 8^2 + 8^3 + 8^4) + \dots + (8^{2001} + \dots + 8^{2004}) + 8^{2005} + 8^{2006}] \\ &= U(1 + 0 + \dots + 0 + 8 + 4) = 3, \\ U(S_9) &= U[1 + (9 + 9^2 + 9^3 + 9^4) + \dots + (9^{2001} + \dots + 9^{2004}) + 9^{2005} + 9^{2006}] \\ &= U(1 + 0 + \dots + 0 + 9 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$U(S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_9) = U(1 + 7 + 7 + 3 + 1 + 1 + 7 + 7 + 3 + 1) = 8$$

y hemos terminado.

8. El país Olimpia está formado por  $n$  islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas que puedan transitarse en ambas direcciones de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
- Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla utilizando cada puente no más de una vez, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

Determine el número de maneras de construir los puentes.

(VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, Panamá, 2006)

#### SOLUCIÓN OFICIAL:

Nótese que la red de puentes de Olimpia no puede contener ciclos. Para demostrar esto, supóngase que las islas  $X$  y  $Y$  pertenecen a un ciclo (ciclo simple, sin repetición de puentes) y que el número de habitantes de  $X$  es mayor al número de habitantes de  $Y$ . Para cada isla  $Z$  en el ciclo, diferente de  $X$  y  $Y$ , se debe cumplir que el número de habitantes de  $Z$  es menor que el de  $X$  y mayor que el de  $Y$ .

Además, existe un recorrido que va de  $Z$  a  $Y$  pasando por  $X$  que no repite los puentes (tómense las dos componentes del ciclo al cortar en  $Z$  y en  $Y$  y de estas tómese la que contiene  $X$ ) por lo que este recorrido va de una isla a otra con menor cantidad de habitantes pasando por una tercera isla que tiene más habitantes que las dos primeras, contradiciendo la conformación de los puentes.

Sean  $I_1, I_2, \dots, I_n$  las islas de Olimpia y  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sus respectivas poblaciones, de forma que  $p_i > p_j$  si y solamente si  $i > j$ . En esta forma, la primera isla en el orden,  $I_1$ ,

debe ser justamente Panacentro. Ahora,  $I_2$  debe estar directamente unida a  $I_1$ , ya que de  $I_1$  es posible llegar a  $I_2$  y en ese camino no deberían encontrarse islas de menor cantidad de habitantes. Para  $I_3$ , es posible unirla con un puente directamente a  $I_1$  o directamente a  $I_2$ , pero no a las dos, ya que se formaría un ciclo. Se tienen entonces 2 posibilidades. Para  $I_4$ , se le puede unir directamente con  $I_1$ ,  $I_2$  o  $I_3$ , para obtener 3 posibilidades. Siguiendo el proceso, hasta llegar a  $I_n$  para la que existen  $n - 1$  posibilidades (unir directamente con cualquiera de las islas anteriores) se tiene que el total de opciones para conformar los puentes de Olimpia está dado por

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n - 1) = (n - 1)!$$

9. ¿ Existen dos enteros positivos  $a$  y  $b$  tales que su suma sea 1995 y su producto sea un múltiplo de 1995 ?

(VII Olimpiada Nacional de Matemática, Chile, 1995)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Supongamos que existen dos enteros  $x$  e  $y$  tales que  $x + y = 1995$  y  $x \cdot y = 1995 k$  para algún  $k$  entero. Nótese que  $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ . Dado que 3 divide a 1995, tenemos que 3 divide a  $x \cdot y$ . Si 3 divide a  $x$ , entonces la primera ecuación nos dice que 3 también divide a  $y$ . Similarmente si 3 divide a  $y$  tenemos que 3 divide a  $x$ . Repitiendo el argumento para los primos 5, 7 y 19, se obtiene que ambos,  $x$  e  $y$  son múltiplos de  $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 1995$ , y por lo tanto su suma no puede ser 1995. En consecuencia no existen números  $x, y$  con las condiciones pedidas.

10. Sea  $a$  un número entero positivo. Demuestre que la ecuación

$$x^2 - y^2 = a^3$$

siempre tiene soluciones  $x$ ,  $y$  que son números enteros.

(VII Olimpiada Nacional de Matemática, Chile, 1995)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Dado que

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

podemos considerar las ecuaciones

$$x + y = a^2$$

y

$$x - y = a$$

Estas ecuaciones tienen solución

$$x = a(a + 1)/2$$

$$y = a(a - 1)/2$$

Como  $a$  o  $a + 1$  es par,  $x$  es un entero. Similar razonamiento nos dice que  $y$  es un entero. En consecuencia la ecuación siempre tiene soluciones enteras.

## 7. Olimpiadas alrededor del mundo.

Randall Godínez.

Arlene Martínez.

Melissa Ramírez.

Carlos Rodríguez.

En esta columna se propondrán únicamente problemas que hayan sido parte de exámenes de competencias olímpicas, nacionales o internacionales, con esto pretendemos que otros tipos de competencias sean abordados en la columna *Problemas de Competencias no Olímpicas* (antes denominada problemas propuestos) de esta misma revista.

Es importante hacer notar que los problemas de la OLCOMA que se publican en esta revista corresponden a lo que hoy se considera el nivel C de estas competencias olímpicas y que se hará referencia a otro nivel cuando ello sea necesario.

1. Sea  $p(x)$  un polinomio cúbico con raíces  $r_1, r_2, r_3$ . Suponga que

$$\frac{p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(-\frac{1}{2}\right)}{p(0)} = 1000.$$

determine el valor de

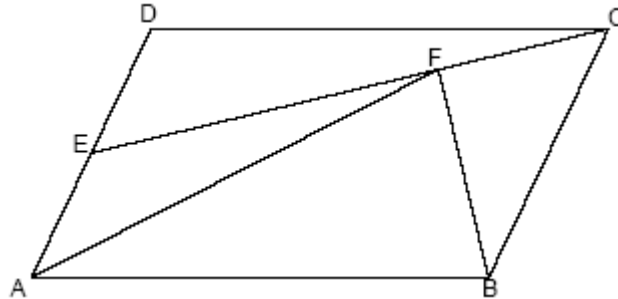
$$\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}.$$

(Olimpiada Australiana de Matemática, 1996)

2. Sea  $ABCD$  un cuadrilátero concíclico y sean  $P$  y  $Q$  puntos sobre los lados  $AB$  y  $AD$ , respectivamente, tales que  $AP = CD$  y  $AQ = BC$ . Sea  $M$  el punto de intersección de  $AC$  y  $PQ$ . Pruebe que  $M$  es el punto medio de  $PQ$ .

(Olimpiada Australiana de Matemática, 1996)

3. En el paralelogramo  $ABCD$ ,  $E$  es el punto medio del segmento  $AD$  y  $F$  es la proyección ortogonal de  $B$  sobre  $CE$ , Pruebe que el triángulo  $ABF$  es isósceles.



(XXIV Olimpiada Portuguesa de Matemática, Categoría B, 2006)

4. Determine todos los números  $n$  tales que exactamente un quinto de los números  $1, 2, 3, \dots, n$  son divisores de  $n$ .

(XXIV Olimpiada Portuguesa de Matemática, Categoría B, 2006)

5. En un triángulo equilátero  $ABC$ , cuyo lado mide 4, se traza la recta perpendicular a  $AB$  por el punto  $A$ , la recta perpendicular a  $BC$  por el punto  $B$  y la recta perpendicular a  $CA$  por el punto  $C$ . Estas tres rectas determinan otro triángulo. Calcular el perímetro de este triángulo.

(XVI Olimpiada Nacional de Matemática, Paraguay, Nivel 3, 2004)

6. Se tiene un número entero  $A$  tal que  $A^2$  es un número de cuatro cifras, con 5 en la cifra de las decenas. Hallar todos los valores posibles de  $A$ .

(XVI Olimpiada Nacional de Matemática, Paraguay, Nivel 3, 2004)

7. Sea  $\mathbb{Q}^+$  el conjunto de los números racionales positivos. Determine todas las funciones

$f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  para todo  $x \in \mathbb{Q}^+$  tal que

$$(1) : f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

$$(2) : \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x) = f(x+1).$$

(Olimpiada Noruega de Matemática, 2003)

8. Pruebe que cualquier solución real de la ecuación

$$x^3 + px + q = 0$$

satisface la inecuación:

$$4qx \leq p^2.$$

(Olimpiada Noruega de Matemática, 2003)

9. Alejandra y Luz están jugando con fichas. El juego consiste en lo siguiente: Al principio ponen 2 pilas con 2004 fichas en cada una. En cada turno se escoge una pila y se toma de ella la cantidad de fichas que quieran, el último en tomar fichas gana (es decir quién ya no pueda tomar fichas pierde). Primero juega Alejandra y luego Luz, si suponemos que las dos son expertas en este juego, ¿hay forma de saber quién será la ganadora? En caso afirmativo da una estrategia que la hace ganadora, en caso contrario argumenta.

( 18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Concurso Regional, Aguascalientes, 2004 )

10. Sea  $a_n$  la última cifra de  $n^n$ , es decir:  $a_1 = 1$  (la última cifra de  $1^1 = 1$ ),  $a_2 = 4$  (la última cifra de  $2^2 = 4$ ),  $a_3 = 7$  (la última cifra de  $3^3 = 27$ ), etcétera.

Calcula la suma  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2003} + a_{2004}$ .

( 18ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Concurso Regional, Aguascalientes, 2004 )

## 8. Lógica y Matemática Recreativa.

Maynor Castro  
 Carlos Molina  
 Mauricio Ramírez  
 Simón Sánchez  
 Erick Solano

En esta columna continuamos con la presentación de diez ejercicios que se han presentado en concursos de E.S.O tanto de España como de Argentina y la Olimpiada Thales.

Por otro lado, y al igual que en la edición anterior, al final de los enunciados damos una solución a los mismos esperando que sirvan como una guía aunque sabemos que se pueden encontrar otras vías de solución a cada uno de ellos.

Pues bien, empecemos y que se diviertan !!!

### *1º Juego (12-14 años): La matrícula del coche*

La matrícula de un automóvil estaba formada por cinco cifras, todas diferentes. Al instalarla, el mecánico se equivocó, poniéndola "cabeza abajo". Posteriormente al recoger el vehículo el dueño se dio cuenta de que el número obtenido era mayor que el original en 78633.

¿Cuál era el número de matrícula?

(Nota: el número uno se escribía así: 1 y no así 1)

(X O.M. Primera Fase. Albacete. 1999)

### *2º Juego (12-14 años): Dígitos omitidos*

¿Qué dígitos se han omitido en la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r}
 2 \ * \ * \\
 \times \ * \ * \\
 \hline
 * \ 6 \ 1 \\
 * \ * \ * \\
 \hline
 * \ * \ 0 \ 1
 \end{array}$$

(XXXV O.M. Española. Fase Local. 1999)

**3º Juego (12-14 años): La isla misteriosa**

Un viajero llega a una isla en la que todos sus habitantes dicen la verdad los lunes, miércoles, viernes y domingos, mientras que los demás días de la semana dicen siempre la mentira. El viajero mantiene el siguiente dialogo con un nativo de la isla:

Viajero: ¿Qué día es hoy?

Nativo: Sábado

Viajero: ¿Qué día será mañana?

Nativo: Miércoles

¿Qué día de la semana es realmente?

( X O. M. Fase Comarcal Valencia. 1999 )

**4º Juego (14-16 años): Refugio de montaña**

El camino entre el pueblo y el refugio en la montaña mide un número entero de kilómetros. Una mañana, tres grupos de andinistas salen del pueblo hacia el refugio. El primer día, el grupo A recorre la sexta parte del camino, el grupo B la mitad del camino, y el grupo C la cuarta parte del camino. Al día siguiente, el grupo A recorre 100 km, el grupo B recorre 10 km, el grupo C recorre 78 km, y nadie llega al refugio.

Si el grupo B ha recorrido en total, más distancia que el A, pero menos que el C, determinar cuánto mide el camino desde el pueblo hasta el refugio.

( IV O.M. Provincial de Entre Ríos. 2000)

**5º Juego (14-16 años): Pesar monedas**

Tenemos 105 monedas entre las cuales sabemos que hay tres falsas. Las monedas auténticas pesan todas lo mismo y su peso es mayor que el de las falsas, que también pesan todas lo mismo.

Indicar de qué manera se pueden seleccionar 26 monedas auténticas realizando sólo dos pesadas en una balanza de dos platillos

( VII O.M. Primera Fase. Albacete. 1996)

**6º Juego (14-16 años): Las edades escondidas**

- ¿Tienes prisa, Raúl?. (Observó el profesor mientras su amigo tragaba el resto de su café y se levantaba para irse).

- Saco a pasear a tres muchachas en mi coche. (Contestó Raúl).

El profesor rió.

- ¡Con que era eso!. ¿Y qué edad tienen esas tres chicas?.

Raúl pensó un momento.

- Multiplicando sus edades entre sí se obtiene 2.450 y además la suma de sus edades es exactamente el doble de tu propia edad.

El profesor negó con la cabeza.

- Muy interesante, pero eso todavía no aclara las edades de ellas.

Raúl coincidió con el profesor.

- Es cierto, me olvidé de mencionar que yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja. Y con esto creo que queda todo bien claro.

El profesor, por supuesto, sabía la edad de su amigo.

¿Puedes tú calcular las edades de las chicas, la del profesor y la del propio Raúl?

( VIII O.M. Primera Fase. Albacete. 1997)

**7º Juego (14-16 años): El tren de Azul**

Un tren parte de Azul con 134 pasajeros entre hombres, mujeres y niños. Para en varias estaciones; cada vez que para, bajan 2 hombres y 1 mujer y suben 4 niños. Al llegar al final del recorrido hay, en total, 143 pasajeros: el número de niños es una vez y media el número de hombres, el número de mujeres es la mitad del número de niños.

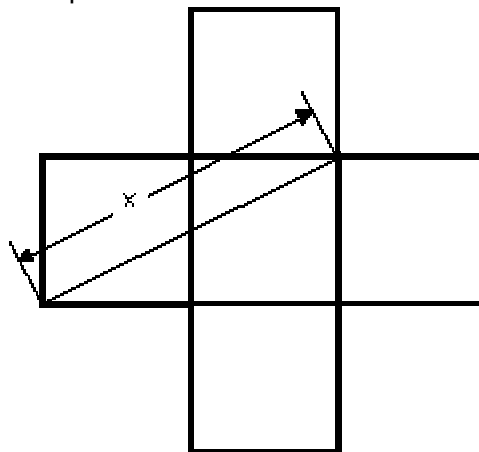
¿Cuántos hombres, mujeres y niños había en el tren cuando partió de Azul?

( IX O.M. Certamen Nacional. Ñandú. 2000 )

**8º Juego (12-14 años): La cruz**

La cruz de la figura está formada por cinco cuadrados iguales.

Calcula el área de la cruz, sabiendo que  $x = 10$  cm



( XII O.M. Primera Fase. Albacete. 2001 )

**9º Juego (12-14 años): Reparto equitativo**

Pepe, Pedro y Paco van de excursión. A la hora de comer deciden juntar los refrescos, que se reparten a partes iguales. Pepe aporta 4 refrescos y Pedro 3.

" Yo no tengo refrescos", dice Paco, "así que pondré dinero, tomad 200 pesetas".

¿Cómo deben repartirse Pepe y Pedro las 200 pesetas?

( XV O. M. Thales. Fase Regional Sevilla. 1999 )

**10º Juego (12-14 años): La biblioteca**

En la biblioteca un tercio de los libros son de Matemáticas. Hay 30 libros de Lengua. Hay 24 libros de Ciencias Sociales. Hay tantos libros de Ciencias Naturales como de Lengua.

¿Cuántos libros hay en total en la biblioteca?

(Ñandú. 21-Mayo-1999)

**SOLUCIONES PROPUESTAS**

**La matrícula del coche**

10968

Los únicos números que al ponerlos "cabeza abajo" siguen teniendo sentido son el 0, 1, 6, 8 y 9. Como al girar la matrícula el primer número será el último, el número al revés empezará por 8 y terminará por 1 para que la resta de éste con el número al derecho empiece por 7 y termine por 3. Haciendo varias pruebas obtendremos el número pedido.

***Dígitos omitidos***

```
2 8 7
x 2 3
-----
8 6 1
5 7 4
-----
6 6 0 1
```

***La isla misteriosa***

JUEVES

Hoy es jueves, porque dice que hoy es sábado y los sábado miente, entonces no es sábado. Me queda que sea martes o jueves. Dice que mañana es miércoles, por lo tanto no es martes.

***Refugio de montaña***

Si llamamos x al recorrido tendríamos que han recorrido en total:

$$A = x/6 + 100$$

$$B = x/2 + 10$$

$$C = x/4 + 78$$

Se busca un número entero positivo que al dividirlo por lo que se indica en cada caso y sumarle nos dé que C sea mayor que B y este a su vez mayor que A. El número es por lo tanto 271.

### ***Pesar monedas***

Primero pones en un platillo 52 monedas y en el otro otras 52, dejando una moneda sin pesar. Si la balanza se equilibra (lo que es poco probable), significará que en cada platillo hay una falsa y la tercera será la que hemos dejado sin pesar.

Si la balanza no se equilibra, en el platillo que pese menos habrá 2 o 3 monedas falsas, y en el que pese más habrá 1 o ninguna moneda falsa. (Puede haber 3 falsas en un platillo, 2 en uno y 1 en otro, 2 en uno y 1 la que hemos descartado, o 1 en un platillo otra en otro y otra sin pesar).

Cogeremos las monedas del platillo que pesa más (o si los platillos están en equilibrio da igual el que cojamos) y haremos la otra pesada, donde pondremos 26 monedas en un platillo y 26 en otro. Entre los dos platillos debe de haber 1 o ninguna moneda falsa. Así si los platillos se equilibran, da igual las 26 monedas que seleccionemos, todas son verdaderas. Si no se quedan en equilibrio, las 26 monedas verdaderas serán las del platillo que pese más.

### ***Las edades escondidas***

Para que el profesor pida un último dato es necesario que dos formas distintas de tres factores de 2450 sumen lo mismo (el doble de la edad del profesor). Este caso lo podemos encontrar:

$$49 \cdot 10 \cdot 5 = 2450$$

$$49 + 10 + 5 = 64$$

$$50 \cdot 7 \cdot 7 = 2450$$

$$50 + 7 + 7 = 64$$

Ya que el profesor sabe la edad de Raúl y por tanto sabe las edades de las chicas, Raúl debe tener 49 años (es por lo menos 1 año menor que la más vieja), porque si tuviera menos podría ser cualquier combinación de factores de las dos. Así las chicas tienen 50, 7 y 7 años. Raúl tiene 49 años y el profesor tiene 32 años.

### ***El tren de Azul***

Al final del recorrido hay 134 personas de las cuales son 66 niños, 33 mujeres, 44 hombres.  
 $m = n/2$ ,  $h = 2n/3$ ,  $n + m + h = 143$   $n + n/2 + 2n/3 = 143$   $13n = 858$   $n = 858/13$   $n = 66$ .

$$143 - 134 = 9$$

Como hay 9 personas más que en Azul y en cada parada suben 1 persona más de las que bajan, el tren ha parado en 9 paradas. Por lo tanto desde Azul han bajado 9 mujeres, 18 hombres y han subido 36 niños. En Azul habían  $44 + 18 = 62$  hombres,  $33 + 9 = 42$  mujeres y  $66 - 36 = 30$  niños.

***La cruz***

$$(2L)^2 + L^2 = 10^2 \quad 4L^2 + L^2 = 100 \quad 5L^2 = 100 \quad L^2 = 100/5 = 20 \text{ cm}^2$$

Como el área del cuadrado es  $L^2$ , 5 cuadrados tendrán:  $5 \cdot 20 = 100 \text{ cm}^2$

***Reparto equitativo***

Cada uno se bebe  $7/3$  de refresco. De los  $7/3$  que se bebe Paco,  $5/3$  se los ha dado Pepe y  $2/3$  se los ha dado Pedro.

$$\begin{aligned} 7/3 & \text{----} 200 \\ 5/3 & \text{----} x \\ x & = 5/3 \cdot 200 : 7/3 = 1000/7 \\ \text{Pepe} & = 1000/7 = 143 \text{ptas aproximadamente.} \\ \text{Pedro} & = 200 - 143 = 57 \text{ptas aproximadamente.} \end{aligned}$$

***La biblioteca***

Hay 126 libros en la biblioteca.  
Si los libros de matemáticas son un tercio, quiere decir que la suma de todos los demás son los dos tercios restantes.  
 $30 + 30 + 24 = 84$  son dos tercios  $84 : 2 = 42$  son de matemáticas.

En 1996, durante la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que tuvo lugar en nuestro país, se encontró en una pared de un pasillo de la Universidad de San José un letrero titulado EL ADMINISTRATO, junto con una dirección electrónica de la que presuntamente procedía.

Esperamos que obtengan un sano, pero también divertido, análisis del mismo.

## EL ADMINISTRATO

El elemento más pesado ha sido recientemente descubierto por investigadores de una Universidad de los Estados Unidos. El elemento, llamado provisionalmente *administrato*, no tiene protones ni electrones, y por lo tanto tiene número atómico 0. Sin embargo, tiene 1 *neutrón*, 125 *neutrones asistentes*, 75 *viceneutrones* y 111 *viceneutrones asistentes*. Esas 312 partículas se mantienen unidas por una fuerza que implica el intercambio continuo de partículas parecidas a los mesones, llamadas *mamones*. Ya que no tiene electrones, el *administrato* es inerte. Sin embargo, puede ser detectado químicamente porque obstaculiza toda reacción con la que entre en contacto.

Según los investigadores, una cantidad pequeñísima de *administrato* hace que una reacción tarde 4 días en completarse, cuando normalmente habría ocurrido en menos de 1 segundo.

El *administrato* tiene una vida media normal de 3 años, al cabo de los cuales no se agota, sino que emprende una reorganización en la que los neutrones asistentes, viceneutrones y viceneutrones asistentes intercambian sus puestos. Algunos estudios indican que la masa atómica aumenta realmente tras cada reorganización.

La investigación en otros laboratorios indica que el *administrato* se produce de forma natural en la atmósfera. Tiende a concentrarse en ciertos puntos, tales como agencias gubernamentales, grandes empresas y universidades. Usualmente se puede hallar en los edificios más modernos y mejor construidos y conservados.

Los científicos dicen que se sabe que el *administrato* es tóxico a cualquier nivel de concentración y puede destruir fácilmente cualquier reacción productiva si se le permite concentrarse. Se han hecho intentos para determinar cómo puede ser controlado para evitar daños irreversibles, pero hasta la fecha los resultados no son prometedores.