

*Sociedad Ramamsem*

*Problemas de Matemática para*

*Competencias olímpicas*

Elaborado por :

Miguel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

IV TRIMESTRE DEL 2006

# CONTENIDO

---

	Página
1. Presentación	1
2. Solución a los anteriores Problemas de Competencias no Olímpicas	2
3. Problemas de Competencias no Olímpicas	23
4. <i>CURIOSATO</i>	29
5. Solución al <i>CURIOSATO</i>	36
6. Solución a Selección de problemas	41
7. Olimpiadas alrededor del mundo	51
8. Lógica y Matemática Recreativa	54

---

## 1. Presentación.

A partir de esta publicación, la *SOCIEDAD RAMAMSEM* les comunica a sus estimables lectores que el formato de algunas columnas sufrirá algunos cambios al igual que su nombre.

En esta tercera publicación del año, aún no se ha adicionado la nueva columna en donde se proponen diez problemas que nos remitan nuestros lectores pues no hemos recibido el material suficiente para su publicación y algunos de los problemas enviados no satisfacen los requerimientos establecidos, éstas son:

1. Debe ser enviado a alguno de los correos electrónicos de la sociedad que se encuentran al final de esta presentación y antes del 30 del mes anterior.
2. Debe estar digitado en procesador WORD y en letra ARIAL número 12.
3. Debe venir el nombre completo del proponente y su lugar de trabajo o estudio.
4. Debe adjuntarse, al menos, una solución del mismo.

En caso de que un problema, enviado por algún lector, sea seleccionado se publicará el nombre de quien lo propone. Del mismo modo, cuando se reciban soluciones a un problema por parte de los lectores se seleccionará una de ellas, de acuerdo con los criterios que un comité de la *SOCIEDAD RAMAMSEM* empleará, para ser publicada respetando la correspondiente autoría además del nombre de los demás lectores que resolvieron el problema y la solución ofrecida por el proponente.

Por otro lado, tanto los 30 problemas de la sección **Problemas de Competencias no Olímpicas** como los 10 problemas de la sección **Olimpiadas alrededor del mundo** de cada publicación trimestral serán resueltos en el próximo ejemplar para que los lectores puedan participar enviando las soluciones y / o comentarios a algunos de ellos para su publicación.

Esta publicación es realizada por la Sociedad RAMAMSEM y va dirigida a todas aquellas personas que deseen explorar una matemática diferente a la que se enseña en secundaria, y algo más !

Toda comunicación o información con respecto a los problemas propuestos o soluciones, pueden ser enviados a



ramamsem@latinmail.com o bien ramamsem@costarricense.c

## 2. Solución a los anteriores Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

A continuación brindamos la solución de los 30 Problemas de Competencias no Olímpicas de la edición anterior

### ÁLGEBRA.

1. Resolver la ecuación:  $\log_2 x = \log_4(x+1)$ .  
(Círculo Matemáticos Rusos, primer nivel, 1999)

SOLUCIÓN:

$$\log_2 x = \log_4(x+1) \Rightarrow \log_2 x = \frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}, \text{ lo anterior al efectuar cambio de base.}$$

$$\Rightarrow 2\log_2 x = \log_2(x+1) \Rightarrow \log_2 x^2 = \log_2(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. Los números positivos  $x$  y  $y$  satisfacen  $xy = 1$ . Halle el mínimo valor de  $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{4y^4}$ .

(Alberta High School Mathematics Competition, 1995)

SOLUCIÓN:

Tenemos que

$$\frac{1}{x^4} + \frac{1}{4y^4} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2y^2}\right)^2 + \frac{1}{x^2y^2} \geq 1,$$

con igualdad si y sólo si  $x^2 = 2y^2$ .

3. Si  $4 \leq x \leq 6$  y  $2 \leq y \leq 3$ , halle el menor valor de  $(x - y)(x + y)$ .

(The Eleventh W. J. Blundon Contest, 1994)

SOLUCIÓN:

Si  $4 \leq x \leq 6$  y  $2 \leq y \leq 3$ , entonces el mínimo valor que toma  $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$  se obtendrá cuando  $y$  alcance su máximo valor posible y  $x$  alcance su mínimo valor posible. De lo anterior se tiene que  $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 \geq 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$ .

4. Pruebe que para todo número real  $x$  se cumple:  $x^4 \geq 4x - 3$ .

(Canadian Mathematical Society Prize Exam, 1996)

SOLUCIÓN:

La desigualdad a probar es equivalente a  $x^4 - 4x + 3 \geq 0$ . Aplicando división sintética al polinomio  $x^4 - 4x + 3$  obtenemos que la desigualdad puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2(x^2 + 2x + 3) &\geq 0 \Rightarrow (x - 1)^2[(x^2 + 2x + 1) + 2] \geq 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)^2[(x + 1)^2 + 2] \geq 0\end{aligned}$$

notemos que, en esta última desigualdad el primer factor del miembro izquierdo siempre es mayor o igual que cero mientras que el segundo factor siempre es mayor que cero por lo que la prueba está completa.

5. Determine el número diferente de triplas de enteros positivos  $(x, y, z)$  que satisfacen las ecuaciones  $x^2 + y - z = 100$  y  $x + y^2 - z = 124$ .

(Alberta High School Mathematics Competition, 1995)

SOLUCIÓN:

Restando ambas ecuaciones se obtiene  $24 = x + y^2 - x^2 - y = (y - x)(y + x - 1)$ . Notemos que uno de los factores es par y el otro es impar, y que el primer es menor que el segundo. De lo anterior se tiene que  $y - x = 1$  y  $y + x - 1 = 24$  ó  $y - x = 3$  y  $y + x - 1 = 8$ . De lo anterior se obtiene  $(x, y, z) = (12, 13, 57)$  o bien  $(x, y, z) = (3, 6, -85)$  pero como  $z > 0$  se tiene que la única tripleta que satisface las condiciones del enunciado es  $(12, 13, 57)$ .

6.  $x$  e  $y$  son enteros entre 10 y 100.  $y$  es el número obtenido al invertir los dígitos de  $x$ . Si  $x^2 - y^2 = 495$ , halle  $x$  e  $y$ .

(The Manitoba Mathematical Contest, Grade 12, 1995)

SOLUCIÓN:

Sean  $a$  y  $b$  los dígitos de los números  $x$  e  $y$ , con  $x = 10a + b$  y  $y = a + 10b$  (así  $9 \geq a > b \geq 1$ ).

Ahora

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= (10a + b)^2 - (a + 10b)^2 \\&= [(10a + b) + (a + 10b)] [(10a + b) - (a + 10b)] \\&= (10a + b + a + 10b) (10a + b - a - 10b) \\&= 11(a + b) \cdot 9(a - b) \\&= 99(a + b) \cdot 9(a - b) = 495\end{aligned}$$

De donde  $(a + b)(a - b) = 5$  con lo que  $a + b = 5$  y  $a - b = 1$  así  $a = 3$ ,  $b = 2$  por lo que  $x = 32$  y  $y = 23$ .

7. Un polinomio cúbico  $P$  es tal que  $P(1) = 1$ ,  $P(2) = 2$ ,  $P(3) = 3$  y  $P(4) = 5$ . Halle el valor de  $P(6)$ .

(Alberta High School Mathematics Competition, 1995)

SOLUCIÓN:

Por el Teorema del Binomio,  $P(5) = 4P(4) - 6P(3) + 4P(2) - P(1) = 9$ . De aquí se sigue que  $P(6) = 5P(5) - 10P(4) + 10P(3) - 5P(2) + P(1) = 16$ .

8. Resuelva la ecuación  $(x^2 - 5x + 5)^{3x-5} = (x^2 - 5x + 5)^{3-2x}$ .  
(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

Analicemos la ecuación por casos dependiendo de la base de las potencias recordando que:

CASO I:  $1^k = 1$  para todo k real.

$$x^2 - 5x + 5 = 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -1.$$

CASO II:  $0^k = 0$  para todo número real positivo k.

$x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ . Pero el exponente  $3x - 5$  es negativo para el primer valor de x por lo cual se descarta dicho valor y el exponente  $3 - 2x$  es negativo para el segundo valor de x. En conclusión, este caso no aporta ninguna solución.

CASO III:  $(-1)^k = \pm 1$ .

$x^2 - 5x + 5 = -1 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = 2$ . De donde, para  $x = 3$  tendríamos  $(-1)^4 = (-1)^{-5}$  lo cual es falso y por ello este valor se descarta. Para  $x = 2$  tendríamos  $(-1)^1 = (-1)^{-1}$  lo cual es verdadero y por ello este valor se incluye dentro del conjunto solución.

CASO IV:  $a^{P(x)} = a^{Q(x)}$  implica que  $P(x) = Q(x)$  para todo  $a \neq 0$ .

$3x - 5 = 3 - 2x \Rightarrow 5x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$ . Como la base de las potencias es diferente de cero para este valor entonces él se incluye dentro del conjunto solución.

Finalmente, el conjunto solución es  $S = \left\{ -1, \frac{8}{5}, 2, 4 \right\}$ .

9. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sqrt{2^{4\log(x+y)}} + \sqrt{2^{2\log(10x+10y)}} = 80$$

$$\sqrt{3^{4\log(x-y)}} + \sqrt{3^{2\log(10x-10y)}} = 54$$

(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

La primera ecuación es equivalente a  $2^{2\log(x+y)} + 2^{\log(10x+10y)} - 80 = 0$  que a su vez es equivalente a  $\left[2^{\log(x+y)}\right]^2 + 2^{\log 10 + \log(x+y)} - 80 = 0$  esto es  $m^2 + 2m - 80 = 0$  con  $m = 2^{\log(x+y)}$ . Notemos que  $m$  debe ser positivo, al resolver la ecuación en  $m$  el único valor posible es 8 con lo que  $8 = 2^3 = 2^{\log(x+y)}$  así  $3 = \log(x+y) \Rightarrow x+y = 1000$  (1). De un modo similar llegamos a  $3^{\log(x-y)} = 6$  con lo que  $x-y = 10^{\log_3 6}$  (2). Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) se obtiene  $x = \frac{1000 + 10^{\log_3 6}}{2}$ ,  $y = \frac{1000 - 10^{\log_3 6}}{2}$ .

10. Si  $x^y \cdot y^x = y^4$ ;  $x^{y+1} = (\sqrt{y})^{x+3}$ , determine el valor numérico de

$$L = \frac{1}{x} \left( \frac{5y+8}{3y+2} \right)$$

(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

De  $x^y \cdot y^x = y^4$  obtenemos  $x^y = y^{4-x}$  sustituyendo esta expresión en  $x^{y+1} = (\sqrt{y})^{x+3}$  se

obtiene  $x \cdot y^{4-x} = y^{\frac{x+3}{2}} \Rightarrow x = y^{\frac{x+3}{2} - 4 + x} = y^{\frac{3x-5}{2}}$ . Sustituyendo esta última primera

ecuación obtenemos  $\left(\frac{3x-5}{y^2}\right)^y \cdot y^x = y^4$  lo que equivale a

$3xy - 5y + 2x = 8 \Rightarrow x(3y+2) = 5y+8 \Rightarrow x = \frac{5y+8}{3y+2}$  con lo que, finalmente,  $L=1$ .

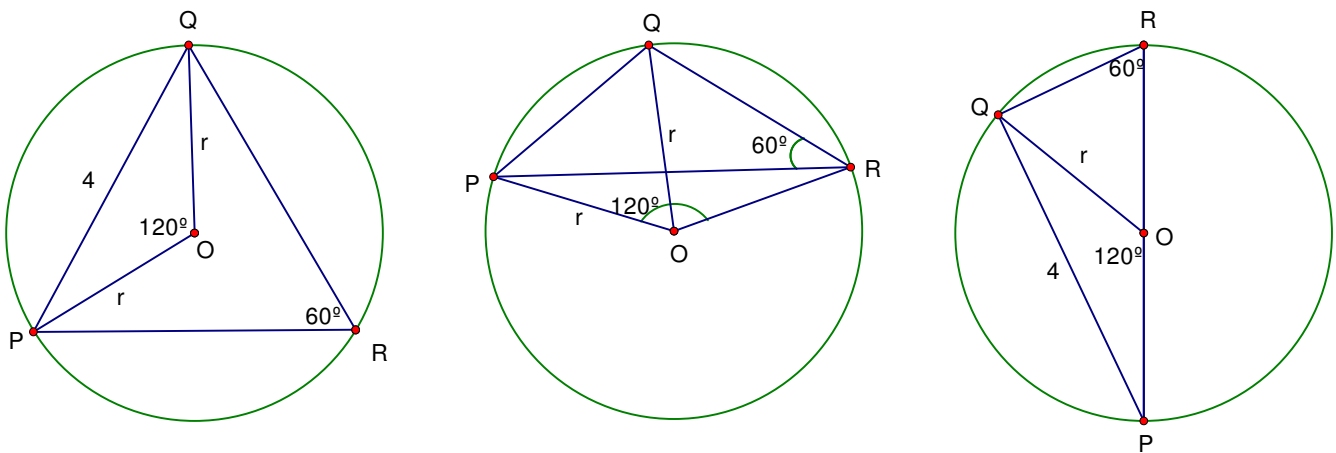
## GEOMETRÍA.

1. Tres puntos P, Q y R están sobre una circunferencia. Si  $PQ = 4$  y  $\angle PRQ = 60^\circ$ , halle la medida del radio del círculo.

(The Manitoba Mathematical Contest, Grade 12, 1995)

SOLUCIÓN:

Consideremos las tres siguientes figuras



Que nos muestran las tres posibilidades para el centro O del círculo: que se encuentre en el interior, en el exterior o sobre un lado del triángulo PQR. En todos ellos  $\angle POQ = 120^\circ$  por ser el ángulo central que subtende el mismo arco que subtende el ángulo inscrito  $\angle PRQ$ . Aplicando la ley de cosenos al  $\triangle POQ$  se tiene

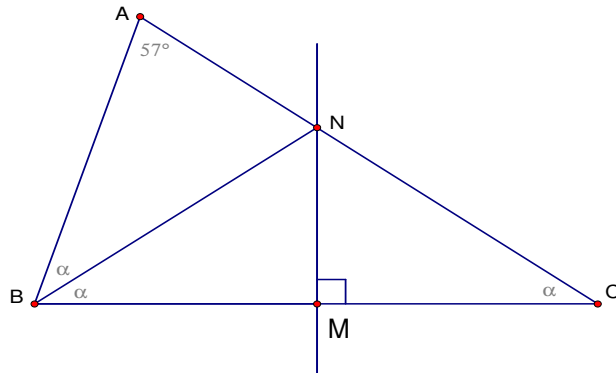
$$\begin{aligned}
 r^2 + r^2 - 2rr \cos 120^\circ &= 4^2 \\
 \Rightarrow 2r^2 - 2r^2 \cdot -\frac{1}{2} &= 16 \\
 \Rightarrow 3r^2 &= 16 \\
 \Rightarrow r^2 &= \frac{16}{3} \\
 \Rightarrow r &= \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

2. El ángulo A de un triángulo ABC mide  $57^\circ$ . La bisectriz interior del ángulo B y la mediatriz de lado BC, se intersecan ambas en un mismo punto del lado AC, determine la medida del ángulo B

(CEOC, 1996)

**SOLUCIÓN:**

Consideremos la figura adjunta



Sea M el punto de intersección entre la bisectriz y la mediatriz. Por ser M el punto de  $\overline{AC}$  que contiene la mediatriz éste es el punto medio de  $\overline{AC}$ .

Entonces

$$3\alpha + 57^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + 19 = 60^\circ$$

$$\alpha = 41^\circ$$

$$\angle ABC = 2\alpha = 82^\circ$$

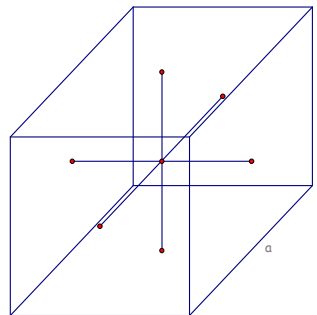
3. Hallar el volumen de un cubo sabiendo que en su interior se ha tomado un punto tal que la suma de las distancias a sus seis caras es de 12 cm.

(CEOC, 1996)

**SOLUCIÓN:**

Consideremos la figura adjunta.

Notemos que la distancia del punto interior a dos caras opuestas del cubo corresponde a la longitud de la arista del cubo. Así, la



distancia del punto a las seis caras del cubo suman tres aristas de donde  $a = \frac{12}{3} = 4\text{cm}$ , por lo

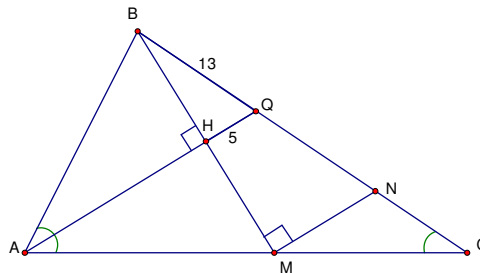
que el volumen del cubo será  $4^3 = 64\text{cm}^3$ .

4. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior AQ ( Q está en BC ), luego por B se traza BH perpendicular a dicha bisectriz ( H está en AQ ), determine la longitud de BC, sabiendo que  $BQ = 13$  m,  $HQ = 5$  m y  $QC = AQ$ .

(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

Consideremos la figura siguiente.



a) Aplicando Pitágoras al  $\triangle BHQ$ , para encontrar HQ, tenemos  $HQ^2 = 13^2 - 5^2$ , de donde sabemos que  $HQ = 12$ .

b) De  $AQ = QC$  concluimos que el  $\triangle QAC$  es isósceles, lo que implica que  $\angle QAC \cong \angle ACQ$ .

c)  $\triangle AHB \cong \triangle AHM$ , por L.A.L, por lo tanto sabemos que  $HM = 12$ .

d) Sea  $HQ \parallel MN$  de aquí podemos afirmar que el  $\triangle BHQ \sim \triangle BMN$  por A.A.A. como  $HM = 12$ , tenemos que  $MN = 10$  y  $BN = 26$ . También  $\angle QAC \cong \angle NMC$  por ser ángulos correspondientes entre paralelas, sabemos entonces que  $\triangle MNC$  es isósceles, de donde se tiene que  $NC = 10$ . Por lo tanto  $BC = BN + NC = 26 + 10 = 36$ .

5. Sean  $a \leq b \leq c$  las longitudes de un triángulo rectángulo,  $S$  su semiperímetro y  $A$  su área. Pruebe que  $S(S - c) = S(S - a)(S - b) = A$ .

(Círculo Matemáticos Rusos, primer nivel, 1999)

COMENTARIO:

Nuestra estimable lectora Ileana Rodríguez Cortés nos indica que el enunciado no es del todo correcto y que el enunciado debería modificarse de la siguiente manera:

Sean  $a \leq b \leq c$  las longitudes de un triángulo rectángulo,  $S$  su semiperímetro y  $A$  su área. Pruebe que  $S(S - c) = (S - a)(S - b) = A$ .

(Círculo Matemáticos Rusos, primer nivel, 1999)

Agradecemos su observación y adjuntamos la solución brindada por ella misma.

SOLUCIÓN: (brindada por Ileana Rodríguez Cortés)

Siendo  $a \leq b \leq c$  entonces  $A = \frac{ab}{2}$  luego, debemos probar que

$$(1) S(S - c) = A.$$

$$(2) S(S - a)(S - b) = A.$$

Notemos que  $S = \frac{a + b + c}{2}$ ,  $S - a = \frac{b + c - a}{2}$ ,  $S - b = \frac{a - b + c}{2}$ ,  $S - c = \frac{a + b - c}{2}$ .

Así, tenemos que

$$(1) S(S - c) = \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{4} = \frac{2ab}{4} = \frac{ab}{2} = A.$$

$$(2) (S - a)(S - b) = \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} = \frac{c^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4} = \frac{2ab}{4} = \frac{ab}{2} = A.$$

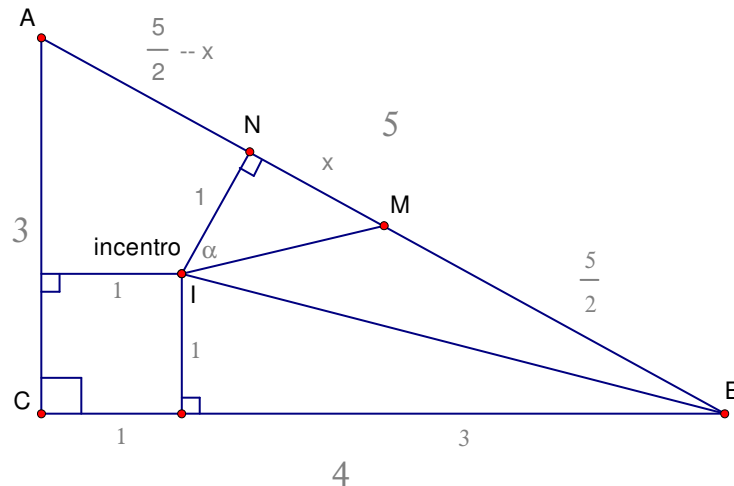
Probadas las identidades (1) y (2) se ha probado la igualdad

$$S(S - c) = (S - a)(S - b) = A.$$

6. En un triángulo rectángulo de lados 3, 4, 5 se traza del incentro una perpendicular a la hipotenusa, uniendo luego el incentro con el punto medio de la hipotenusa. Si  $\alpha$  es el ángulo entre las rectas trazadas, determine el valor de  $\tan \alpha$ . (CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

Consideremos la siguiente figura:



$$\text{Sea } (ABC) = \frac{bh}{2} = Sr \Rightarrow \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{(3+4+5)r}{2} \Rightarrow r = 1.$$

Por Pitágoras tenemos que

$$IB = \sqrt{1^2 + 3^2} \Rightarrow IB = \sqrt{10}.$$

También por Pitágoras tenemos que

$$1^2 + \left(\frac{5}{2} + x\right)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow \left(\frac{5}{2} + x\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{5}{2} + x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

De donde tenemos que

$$\tan \alpha = \frac{x}{1} = \frac{1}{2}.$$

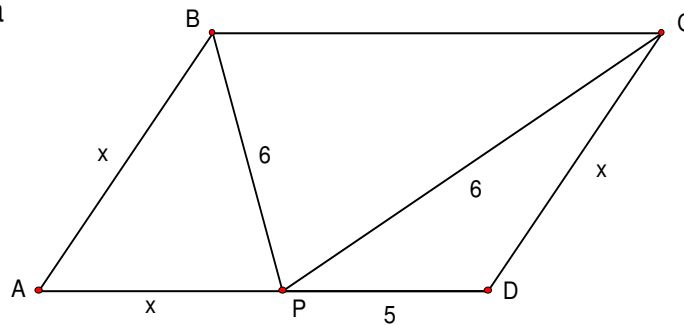
7. En un paralelogramo ABCD, la bisectriz del ángulo  $\angle ABC$  interseca a AD en P.

Si  $PD = 5$ ,  $BP = 6$  y  $CP = 6$ , halle AB.

(Memorial University Undergraduate Mathematics Competition, 1997)

SOLUCIÓN 1:

Consideremos la figura adjunta



Notemos que el  $\triangle BPC$  es isósceles con  $BP = PC$  por lo que  $\angle PBC = \angle PCB$  del mismo modo, el  $\triangle ABP$  es isósceles ya que  $\angle CBP = \angle APB$  por ser alternos internos entre paralelas, así  $\angle ABP = \angle APB$  con lo que  $AB = x = AP$ .

De todo lo anterior se tiene que  $\triangle APB \sim \triangle PBC$  de donde

$$\frac{AP}{PB} = \frac{PB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{6}{x+5}$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = 36$$

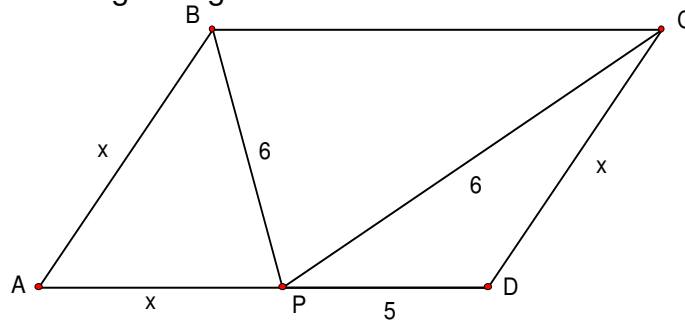
$$\Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -9 \wedge x_2 = 4$$

y siendo  $AB > 0$  se concluye que  $AB = 4$ .

SOLUCIÓN 2: Considerando la figura siguiente



Los ángulos marcados indican que son congruentes dada la naturaleza del paralelismo de ABCD. Es claro que  $\Delta PDC$  no es isósceles ya que si lo fuera entonces  $\angle BCD = \angle ABP$  y ABCD sería un rectángulo y  $\Delta PDC$  un triángulo isósceles y rectángulo lo que contradice dos lados sean 5 y 6 por lo que el triángulo  $\Delta PDC$  es escaleno. Aplicando la ley de cosenos al  $\Delta ABP$  se tiene

$$x^2 = 36 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cos \alpha = \frac{3}{x} \quad (1)$$

Aplicando la ley de cosenos al triángulo  $\Delta DPC$  se tiene

$$x^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 + 36 - 60 \cdot \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow x^3 - 61x + 180 = 0$$

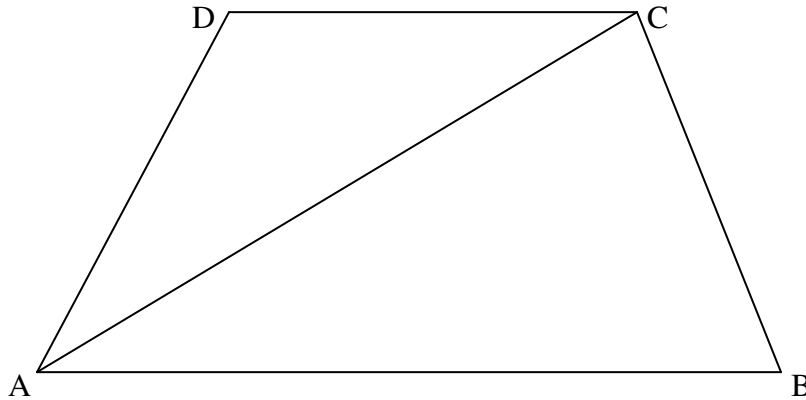
$$\Rightarrow (x - 4)(x - 5)(x + 9) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \vee x = 5 \vee x = -9$$

Como  $\Delta DPC$  es escaleno y  $\angle PDC$  es obtuso entonces  $CD = AB = 4$ .

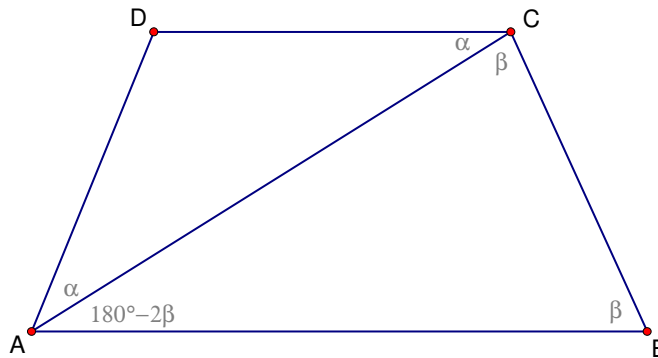
8. Dada la siguiente figura, en donde los segmentos AB y CD son paralelos,  $AD = DC = CB$  y  $AB = AC$ . Determine  $m \angle ADC$ .

(Kangourou Des Mathématiques, 1996)



SOLUCIÓN:

Consideremos la siguiente figura:

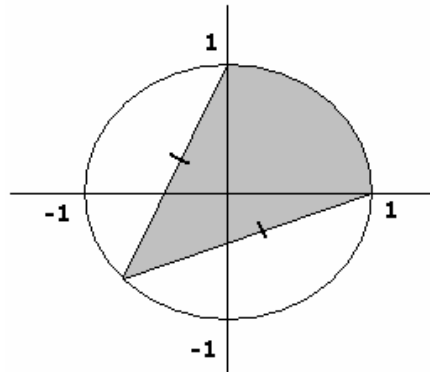


Como  $AD = DC$  entonces  $\angle DAC = \alpha = \angle ACD$  y  $AC = \beta = AB$ .

Como  $AD = CD$  entonces el trapecio es isósceles con lo que se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\beta = 180^\circ \\ 180^\circ - 2\beta + \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha - 3\beta = -180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 36^\circ \\ \beta = 72^\circ \end{cases} \Rightarrow m\angle ADC = 108^\circ$$

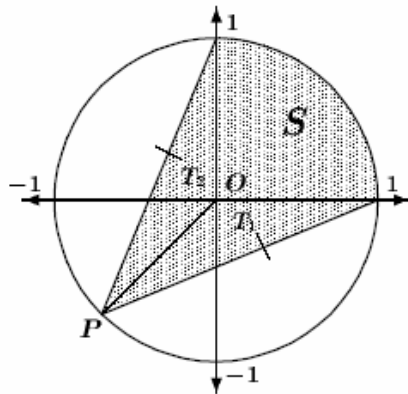
9. Halle el área de la región destacada con gris.



(P.E.I. Mathematics Competition, 1995)

SOLUCIÓN:

Consideremos la siguiente figura.



Primero determinaremos las coordenadas del punto  $P$ . Desde el momento en que  $P$  es un punto de la recta  $y = x$ ,  $P = (a, a)$  para algún valor de  $a$ . Además, como  $P$  pertenece al círculo  $x^2 + y^2 = 1$ ,

$a^2 + a^2 = 1$  y así  $a = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ . De lo anterior se tiene que  $P = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ . Dividiendo el área

sombreada como se indica en la figura se tiene que el área del cuarto del círculo  $S$  es  $\frac{\pi}{4}$  y el

área del triángulo  $T_1 = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = T_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Por lo tanto, el área total sombreada es

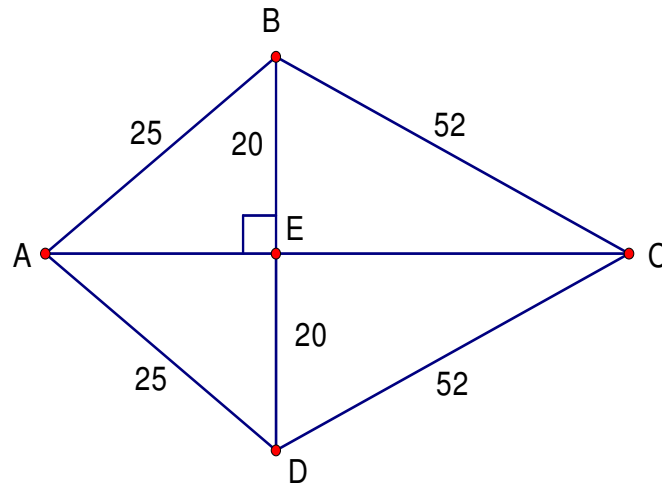
igual a  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

10. ABCD es un cuadrilátero con  $AB = AD = 25$  cm,  $CB = CD = 52$  cm y  $DB = 40$  cm. Determine AC.

(The Mathematical Association National Mathematics Contest, 1994)

SOLUCIÓN:

Consideremos la figura adjunta



Sea E el punto de intersección de las diagonales BD y AC. Siendo  $\triangle ABD$  y  $\triangle DCD$  triángulos isósceles se tiene que, A-E-C y  $AE \perp BD$  y  $CE \perp BD$ . Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos  $\triangle ABE$  y  $\triangle BEC$  se tiene  $BE^2 + AE^2 = AB^2$  y  $BE^2 + EC^2 = BC^2$  de donde  $AE = 15$ cm y  $EC = 48$ cm con lo que  $AC = 63$ cm.

## TEORÍA DE NÚMEROS.

1. Determine el dígito de las unidades de  $26^{26} + 33^{33} + 45^{45}$ .

(The Eleventh W.J. Blundon Contest, 1995)

SOLUCIÓN:

El dígito de las unidades buscado es el mismo que el de la expresión  $6^{26} + 3^{33} + 5^{45}$ . Determinar el dígito de las unidades de una cantidad numérica es igual que determinar con qué dígito es congruente dicha cantidad numérica módulo 10. Ahora bien,  $6^n \equiv 6 \pmod{10}$  para  $n \geq 1$  y

$$3^n = \begin{cases} 3 & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 9 & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 7 & n \equiv 3 \pmod{4} \\ 1 & n \equiv 4 \pmod{4} \end{cases}$$

así,  $3^{33} \equiv 3 \pmod{10}$ . Finalmente  $5^n \equiv 5 \pmod{10}$  para  $n \geq 1$ . Por tanto

$$6^{26} + 3^{33} + 5^{45} \equiv 6 + 3 + 5 \equiv 4 \pmod{10}$$

el dígito de las unidades de  $26^{26} + 33^{33} + 45^{45}$  es 4.

2. Halle todos los enteros positivos  $n$  tales que  $2n + 3$  es un divisor de  $6n + 43$ .

(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, 2000)

SOLUCIÓN:

$\frac{6n + 43}{2n + 3} = 3 + \frac{34}{2n + 3}$ . Para que la expresión anterior sea un entero debe suceder que  $2n + 3$

sea divisor de 34 y como  $2n + 3$  es impar se tiene que  $2n + 3 = 1$  o bien  $2n + 3 = 17$ . De lo anterior se obtiene  $n = -1$  y  $n = 7$ , respectivamente. Pero como  $n > 0$  se concluye que  $n = 7$ .

3. Determine cuál de los siguientes números es mayor:  $999!$  ó  $500^{999}$ .  
(The Mathematical Association National Mathematics Contest, 1994)

SOLUCIÓN:

Escribamos

$$999! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 995 \cdot 996 \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999$$

reagrupando en parejas el producto anterior se tiene que

$$999! = (1 \cdot 999)(2 \cdot 998)(3 \cdot 997)(4 \cdot 996) \cdots (449 \cdot 501)(500).$$

Notemos que ningún número está emparejado con 500 y que se tienen 499 parejas de números. Ahora bien, sabemos que  $(500 - k)(500 + k) = 500^2 - k^2 < 500^2$  para cualquier valor de  $k$  desde 1 hasta 499, así

$$999! < (500^2)(500^2)(500^2)(500^2) \cdots (500^2)(500)$$

donde  $500^2$  se repite 499 veces. Entonces

$$999! < (500^2)^{499}(500) = 500^{2(499)+1} = 500^{999}$$

por lo que  $500^{999}$  es mayor.

4. Determine todos los enteros  $n$  tales que  $n^2 - 11n + 63$  es un cuadrado perfecto.  
(Junior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, 2000)

SOLUCIÓN:

Sea  $n^2 - 11n + 63 = k^2$ , donde  $k$  es un entero no negativo. Entonces

$$\begin{aligned} 4n^2 - 44n + 252 &= 4k^2, \\ \Rightarrow (2n - 11)^2 + 131 &= (2k)^2 \\ \Rightarrow (2k)^2 - (2n - 11)^2 &= 131 \\ \Rightarrow (2k + 2n - 11)(2k - 2n + 11) &= 131 \end{aligned}$$

Notemos que 131 es primo. Desde que  $2k + 2n - 11$  y  $2k - 2n + 11$  son ambos enteros tales que su suma es  $4k \geq 0$ , entonces se tiene las únicas dos posibilidades:

CASO 1:  $2k + 2n - 11 = 131$ ,  $2k - 2n + 11 = 1$ .

Restando ambas ecuaciones se obtiene  $4n - 22 = 130$ , lo cual implica que  $n = 38$ .

CASO 2:  $2k + 2n - 11 = 1$  ,  $2k - 2n + 11 = 131$ .

Restando ambas ecuaciones se obtiene  $4n - 22 = -130$ , lo cual implica que  $n = -27$ .

Por tanto, los valores de  $n$  para los cuales  $n^2 - 11n + 63$  es un cuadrado perfecto son, únicamente, 38 y  $-27$ .

5. Determine el mayor entero  $n$  tal que la suma de los cubos de sus dígitos (en base 10) sea mayor que  $n$ .

(Maritimes Mathematics Competition, 1999)

SOLUCIÓN:

Sea

$$n = d_k \dots d_1 = d_k 10^{k-1} + \dots + d_1 10^0$$

en base 10. Entonces  $d_k \neq 0$  y  $0 \leq d_i \leq 9$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Así

$$\sum_{i=1}^k d_i^3 \leq 9^3 \cdot k = 729k.$$

Por otro lado, es claro que  $n \geq 1 \cdot 10^k - 1$ .

Ahora,  $729k < 1 \cdot 10^k - 1$  para  $k \geq 5$ , por inducción sobre  $k$ , así que  $k \leq 4$ .

Por ensayo y error, con  $k = 4$ , desde que  $729 \times 4 = 2916$ , se obtiene que  $d_4 = 1$  o  $d_4 = 2$  (y  $\sum d_i^3 \leq 2187 + 1$  ó  $2187 + 8$ ).

Si  $d_4 = 2$ , tenemos que  $d_3 = 0$  o  $d_3 = 1$  y  $\sum d_i^3 \leq 1458 + 8 + 0$  o  $1458 + 8 + 1$ , así  $d_4 \neq 2$ . Con  $d_4 = 1$ , se obtiene 1999, con el cual  $\sum d_i^3 = 2188$ . Por tanto, el mayor número buscado es 1999.

## **FUNCIONES O SUCESIONES.**

1. Sea  $f$  una función que satisface  $f(f(x)) = f(x + 2) - 3$  para todo entero  $x$ . Si  $f(1) = 4$  y  $f(4) = 3$  entonces determine  $f(5)$ .

(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1996)

**SOLUCIÓN:**

Tenemos que  $3 = f(4) = f(f(1)) = f(3) - 3$  así que  $f(3) = 6$ . Del mismo modo, tenemos que  $6 = f(3) = f(f(4)) = f(6) - 3$  así que  $f(6) = 9$ . De allí que  $9 = f(6) = f(f(3)) = f(5) - 3$  con lo que  $f(5) = 12$ .

2. Dado que  $f(x + 1) - f(x) = 4x + 5$  y  $f(0) = 6$ , determine  $f(x)$ .

(J.I.R MC Knight Problems Contest, 1996)

**SOLUCIÓN:**

Como  $f(x + 1) - f(x) = 4x + 5$  entonces  $f(x) - f(x - 1) = 4(x - 1) + 5$ ,  $f(x - 1) - f(x - 2) = 4(x - 2) + 5$ ,  $f(x - 2) - f(x - 3) = 4(x - 3) + 5$ , ...,  $f(2) - f(1) = 4(1) + 5$ ,  $f(1) - f(0) = 4(0) + 5$ . Sumando miembro a miembro cada una de estas ecuaciones obtenemos  $f(x) - f(0) = 4x(x - 1) / 2 + 5x$  de donde  $f(x) = 2x^2 + 3x + 6$ .

**NOTAS:**

- A. En la solución de este ejercicio se ha utilizado la conocida suma  $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1) / 2$
- B. Se le recomienda al lector resolver este ejercicio utilizando la teoría sobre funciones por recurrencia.
- C. También puede ser resuelto mediante la teoría de diferencias finitas de orden  $k$ .

3. Dado que  $g\left(\frac{x}{2}\right) - 3g\left(\frac{2}{x}\right) = 16x$ , determine  $g(x)$ .

(J.I.R MC Knight Problems Contest, 1996)

SOLUCIÓN:

Hagamos  $x = t \Rightarrow g\left(\frac{t}{2}\right) - 3g\left(\frac{2}{t}\right) = 16t$  (1).

Hagamos  $x = \frac{4}{t} \Rightarrow g\left(\frac{2}{t}\right) - 3g\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{64}{t}$  (2).

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2) se obtiene  $g\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{24}{t} - 4t \Rightarrow g(x) = -\frac{12}{x} - 4x$ .

4. Una sucesión de números enteros está definida por

- a)  $x_1 = 2$ ,
- b)  $x_2 = 5$ ,
- c)  $x_k = x_{k-1} + 2x_{k-2}$  para todo  $k > 2$ .

Pruebe que  $x_n = \frac{7 \cdot 2^{n-1} + (-1)^n}{3}$

(J.I.R MC Knight Problems Contest, 1987)

SOLUCIÓN:

Resolveremos este ejercicio haciendo uso de la teoría de funciones por recurrencia, de c) se tiene que  $x_{k+2} = x_{k+1} + 2x_k$  cuya ecuación característica es  $m^2 - m - 2 = 0$  cuyas soluciones

son 2 y -1. Ahora bien, sabemos que existen constantes  $A$  y  $B$  tales que  $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$ .

De a) y b) se obtiene  $x_1 = 2A - B = 2$  y  $x_2 = 4A + B = 5$ . resolviendo el sistema anterior se tiene

que  $A = \frac{7}{6}$  y  $B = \frac{1}{3}$ . Así,  $x_n = \frac{7}{6} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \frac{7}{6} \cdot 2^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \frac{7 \cdot 2^{n-1} + (-1)^n}{3}$ .

NOTA: este ejercicio puede ser resuelto, entre otras formas, mediante inducción.

5. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión definida por:

a)  $a_0 = 0$

b)  $a_1 = 1$

c)  $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$

Pruebe que  $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$  para todo  $n \geq 1$ .

(CEOC, 1994)

SOLUCIÓN:

Primero, notemos que la expresión a probar es equivalente a  $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} + 1$  para cualquier entero positivo  $n$ , utilizaremos el principio de inducción. Note que  $a_2 = N$ , así que  $a_0 a_2 + 1 = 0 \cdot N + 1 = 1^2$ . Con lo que, la proposición es verdadera para el caso  $n = 1$ .

Ahora, se asume que la proposición es verdadera para  $n = k$ ; esto es,  $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1} + 1$ .

Tenemos que

$$\begin{aligned} a_k a_{k+2} + 1 &= a_k (N a_{k+1} - a_k) + 1 \\ &= N a_k a_{k+1} - a_k^2 + 1 \\ &= N a_k a_{k+1} - (a_{k-1} a_{k+1} + 1) + 1 \\ &= a_{k+1} (N a_k - a_{k-1}) = a_{k+1}^2 \end{aligned}$$

Con lo anterior, se ha probado que la proposición es verdadera para todo  $n = k+1$ . Así, probamos que  $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$  para todo  $n \geq 1$ .

### 3. Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna consistirá en 30 ejercicios propuestos que se separarán por categorías (Álgebra, Geometría, Teoría de Números y Funciones o Sucesiones) y de menor a mayor nivel de dificultad. Es importante destacar que el **nivel de dificultad** en que se ordenarán los ejercicios de cada categoría es valorado por nosotros (los editores) de acuerdo a criterios establecidos pero que ello no significa que esta valoración pueda ser diferente para el estimable lector.

Por otro lado, la solución de los mismos se presentará hasta la próxima edición con la finalidad de que nuestros lectores participen activamente enviándonos soluciones y / o comentarios que puedan enriquecer la discusión de cada ejercicio. Sin embargo, de no darse esa participación en algunos ejercicios, se publicará, al menos, una solución oficial brindada por los encargados de esta sección.

## ÁLGEBRA.

1. Resuelva la siguiente ecuación:  $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 = x$ .

(Concurso Euclides, 1996)

2. Si  $x$  y  $y$  son números reales tales que  $x + y = 1$ ,  $x^3 + y^3 = 4$  determine

a)  $x^2 + y^2$ ;

b)  $x^5 + y^5$ .

(J.I.R M<sup>c</sup> Knight Problems Contest, 1993)

3. Hallar todos los números no negativos  $x, y, z$  tales que

$$\begin{aligned}z^x &= y^{2x}, \\2^z &= 2 \cdot 4^x, \\x + y + z &= 16.\end{aligned}$$

(Concours de Mathématiques des Maritimes, 1999)

4. Determine todos los números reales  $a$  para el cual la ecuación  $a \cdot 3^x + 3^{-x} = 3$  posee una única solución real.

(Finnish High School Mathematics Contest, 1997)

5. Resolver para  $x$ :  $(\log_2 x)(\log_2 x^2) - \log_2 x^3 - 9 = 0$ .

(J.I.R M<sup>C</sup> Knight Problems Contest, 1995)

6. Si  $60^a = 3$  y  $60^b = 5$  calcule entonces  $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$ .

(J.I.R M<sup>C</sup> Knight Problems Contest, 1996)

7. Si  $x^2 + xy + x = 14$  y  $y^2 + xy + y = 28$ , determine entonces el valor numérico de  $x + y$ .

(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 2000)

8. Dado que  $x^2 + y^2 = 28$  y  $xy = 14$ , encuentre el valor de  $x^2 - y^2$ .

(Junior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda final, 2000)

9. Sea  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 10^n$ . ¿Cuántos factores 2 aparecen en la factorización prima de  $S$ ?

(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

10. Sean  $a, b, c$  y  $d$  las raíces de  $x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 148x - 160 = 0$ .

Determine el valor de  $\frac{1}{abc} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd}$ .

(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

**GEOMETRÍA.**

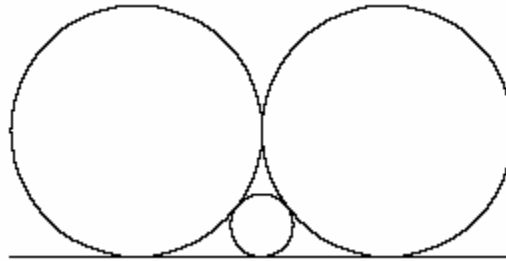
1. Un rombo es un paralelogramo con todos sus cuatro lados de igual longitud. Si uno de los ángulos internos de un rombo mide  $60^\circ$ , halle la razón del área del rombo y la del círculo inscrito en él.

(Concours de Mathématiques des Maritimes, 1999)

2. Sea ABCD un rombo tal que  $\angle DAB = 60^\circ$ . El punto E está sobre AD y el punto F está sobre DC tal que  $AE = DF$ . Pruebe que el triángulo  $\triangle BEF$  es equilátero.

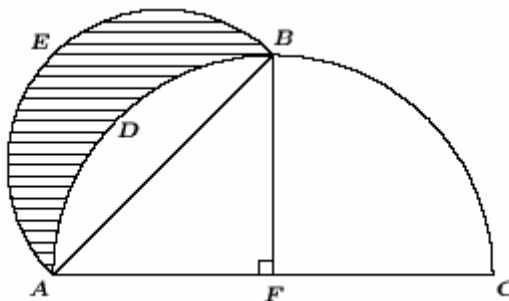
(J.I.R M<sup>c</sup> Knight Problems Contest, 1995)

3. Dos círculos, cada uno de radio 10, son colocados sobre una recta de modo que sean tangentes entre ellos y a la recta. Uno círculo menor es dibujado entre ellos de modo que éste es tangente a los dos círculos y la recta. Determine el radio del menor círculo.



(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 2000)

4. En la figura adjunta ABC y AEB son semicírculos y F es el punto medio de AC y  $AF = 1$  cm. Halle el área de la región destacada.



(Old Mutual Mathematical Contest, Final Paper 1, 1991)

5. En el triángulo ABC,  $AB = AC$ . La bisectriz perpendicular de AB contiene al punto medio de BC. Si la longitud de AC es  $10\sqrt{2}$  cm, halle el área del triángulo  $\Delta ABC$ .

(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

6. Las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo son enteros positivos. El área del triángulo es 120. Determine la longitud de la hipotenusa.

(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

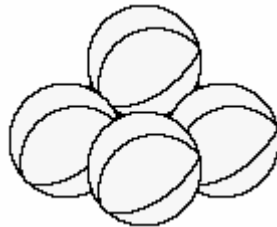
7. Los lados de un triángulo son 4, 13 y 15. Determine la medida del radio del círculo inscrito.

(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

8. Dos cuerdas de un círculo AB y CD se intersecan en ángulo recto en E de modo que  $AE = 2$ ,  $EB = 6$  y  $DE = 3$ . Determine el área del círculo.

(J.I.R M<sup>C</sup> Knight Problems Contest, 1998)

9. Cuatro balones de basket son colocados en el piso de un gimnasio formando un cuadrado con cada balón tangente a los otros tres. Un quinto balón es colocado sobre estos cuatro balones de modo que también es tangente a ellos, como se indica en la figura:



Si el diámetro de un balón de basket es de 25 cm, determine la altura, en centímetros, del centro del quinto balón de basket al piso del gimnasio.

(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 1998)

10. Las longitudes de los lados de un triángulo son  $b + 1$ ,  $7 - b$  y  $4b - 2$ . Determine el número de valores de  $b$  para los cuales el triángulo es isósceles.

(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 1998)

**TEORÍA DE NÚMEROS.**

1. A y B son enteros positivos. La suma de los dígitos de A es 19. La suma de los dígitos de B es 99. Determine el menor valor posible de la suma de los dígitos del número  $A + B$ .

(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1999)

2. Halle la cantidad de números positivos de dos dígitos tales que la diferencia entre él y el producto de sus dígitos sea 12.

(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1999)

3. Ordene ascendentemente los siguientes números:  $2^{55555}$  ;  $3^{33333}$  ;  $6^{22222}$ .

(Junior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 2000)

4. Un cierto número N consiste de tres dígitos los cuales son términos consecutivos de una progresión aritmética. Si N es dividido por la suma de sus dígitos el cociente es 48. También, si 198 es sustraído de N, el resultado es un número que posee los mismos dígitos que N pero en orden inverso. Determine N.

(J.I.R M<sup>C</sup> Knight Problems Contest, 1997)

5. La suma de los primeros tres términos de una progresión geométrica es 37 y la suma de sus cuadrados es 481. Determine los primeros tres términos de esa progresión.

(J.I.R M<sup>C</sup> Knight Problems Contest, 1997)

**FUNCIONES O SUCESIONES.**

1. Dado que  $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cos y$ ,  $f(0) = a$ , y  $f(\pi/2) = b$ . Determine  $f(t)$ .  
(J.I.R. McKnight Problems Contest, 1997)

2. Pruebe que la función:

$$f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8}$$

es constante en el intervalo cerrado  $5 \leq x \leq 10$ .  
(CEOC, 2001).

3. Determine todos los términos de la sucesión  $a_n = 3^{2n-1} + 2^{n-1}$  tales que sean cuadrados para cualquier entero positivo  $n$ .  
(Memorial University Undergraduate Mathematics Competition, 1997)

4. La sucesión de números  $\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  está definida por  $a_n - (n + 1)a_{2-n} = (n + 3)^2$ , para todo entero  $n$ . Calcule  $a_0$ .  
(Canadian Open Mathematics Challenge, 2000)

5. Una función  $f(x)$  tiene las siguientes propiedades:
- a.  $f(1) = 1$
  - b.  $f(2x) = 4f(x) + 6$
  - c.  $f(x + 2) = f(x) + 12x + 12$

Calcule  $f(6)$ .

(Canadian Open Mathematics Challenge, 2004)

#### **4. CURIOSATO.**

Miguel Ángel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna tiene como finalidad mostrar ejercicios de preparación o competencia olímpicas en fases iniciales que se desarrollan en otros países.

Estos tipos de ejercicios son de selección única y se procurará brindar la solución de todos los ejercicios que se propongan. Es importante hacer notar que los mismos pueden servir de preparación para estudiantes que participan en los distintos niveles de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Continuamos con ejercicios correspondientes a los Problemas Introdutorias de la Olimpiada Sonorense de Matemática, estado de la República de México.

**Problema 26.** Cada lado de un rectángulo se divide en tres segmentos de la misma longitud; los puntos obtenidos se unen definiendo un punto en el centro, como se indica en la figura. ¿Cuánto es el cociente del área de la parte blanca entre el área de la parte gris?



- (a) 1                      (b)  $1/2$                       (c)  $1/3$                       (d)  $1/4$                       (e)  $2/3$

**Problema 27.** Al aumentar en la misma proporción la longitud de los lados de un cuadrado, su área aumenta en un 69 %. ¿Qué porcentaje aumentaron sus lados?

- (a) 20%                      (b) 30%                      (c) 34.5%                      (d) 8.3%                      (e) 69%

**Problema 28.** ¿Cuánto es la suma de las cifras del número  $N = 10^{92} - 92$ ?

- (a) 1992                      (b) 992                      (c) 818                      (d) 808                      (e) 798

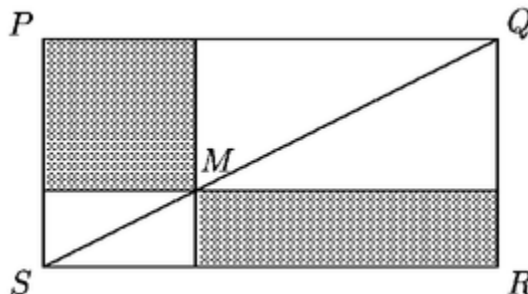
**Problema 29.** Si escribí todos los números enteros del 1 al 1000, ¿cuántas veces apareció la cifra 5?

- (a) 110                      (b) 1331                      (c) 555                      (d) 100                      (e) 300

**Problema 30.** A Julio le dieron el número secreto de su nueva tarjeta de crédito, y observó que la suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es la tercer cifra de su número secreto?

- (a) 1                      (b) 2                      (c) 3                      (d) 4                      (e) 5

**Problema 31.** ¿Qué proporción guardan las áreas de las dos regiones grises marcadas en el rectángulo **PQRS**, si **M** es un punto cualquiera de la diagonal?



- (a) La de arriba es más grande      (b) La de abajo es más grande      (c) Son iguales      (d) Sólo son iguales si **M** es el punto medio      (e) No hay suficientes datos

**Problema 32.** De la ciudad **A** a la ciudad **B** hay 3 caminos, de la ciudad **A** a la ciudad **C** hay 5 caminos, de la ciudad **B** a la **D** hay 2 caminos y de la ciudad **C** a la **D** hay dos caminos. Si un camino que une dos ciudades no pasa por otra, ¿cuántas formas hay de ir de la ciudad **A** a la **D**?

- (a) 12                      (b) 16                      (c) 19                      (d) 32                      (e) 60

**Problema 33.** Se construyó un cubo de alambre de 3 cm de lado dividido en 27 cubitos de 1 cm de lado cada uno. ¿Cuántos centímetros de alambre se usaron para marcar las aristas de los cubos (si no hubo desperdicio)?

- (a) 25                      (b) 64                      (c) 72                      (d) 120                      (e) 144

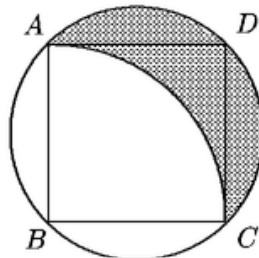
**Problema 34.** Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa 6 y perímetro 14, ¿cuál es su área?

- (a) 3                      (b) 7                      (c) 10                      (d) 14                      (e) 28

**Problema 35.** Alicia va al club cada día; Beatriz va cada 2 días; Carlos va cada 3; Daniel cada 4; Enrique cada 5; Francisco cada 6 y Gabriela cada 7. Si hoy están todos en el club, ¿dentro de cuántos días será la primera vez que vuelvan a reunirse?

- (a) 27                      (b) 28                      (c) 210                      (d) 420                      (e) 5040

**Problema 36.** En la figura, cada lado del cuadrado mide 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

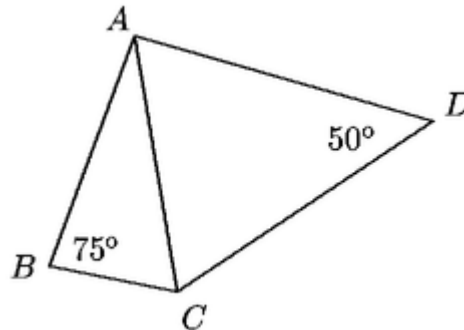


- (a)  $\pi/2$                       (b)  $\pi/4$                       (c)  $1/2$                       (d)  $1 - \pi/4$                       (e)  $1 - \pi/2$

**Problema 37.** Dos enteros  $a > 1$  y  $b > 1$  satisfacen  $a^b + b^a = 57$ . Encuentra la suma  $a + b$ .

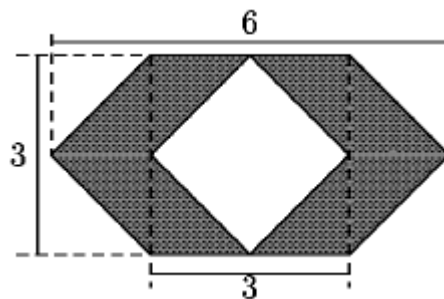
- (a) 5                      (b) 7                      (c) 10                      (d) 12                      (e) 57

**Problema 38.** En la siguiente figura  $AD = DC$ ,  $AB = AC$ , el ángulo  $\angle ABC$  mide  $75^\circ$  y el ángulo  $\angle ADC$  mide  $50^\circ$ . ¿Cuánto mide el ángulo  $\angle BAD$ ?



- (a)  $30^\circ$                       (b)  $85^\circ$                       (c)  $95^\circ$                       (d)  $125^\circ$                       (e)  $140^\circ$

**Problema 39.** ¿Cuánto mide el área de la parte sombreada?



- (a) 9                      (b)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$                       (c) 18                      (d) 12                      (e)  $\frac{6}{\sqrt{3}} - \sqrt{2}$

**Problema 40.** El promedio de 5 números es 40. Al eliminar dos de ellos el nuevo promedio es 36. ¿Cuál es el promedio de los dos números eliminados?

- (a) 34                      (b) 38                      (c) 42                      (d) 46                      (e) 50

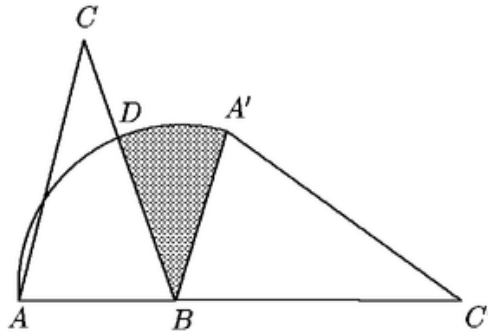
**Problema 41.** Si cada letra **C, A, N, G, U, R, O, S**, corresponde a un dígito entonces

$$10,000 \times \mathbf{UROS} - 10,000 \times \mathbf{CANG} + \mathbf{CANGUROS}$$

es igual a:

- (a) **UROSUROS**   (b) **UROSCANG**   (c) **CANGCANG**   (d) **CANGUROS**   (e) **CARUNGOS**

**Problema 42.** En el triángulo **ABC**, **AB = 1**, **BC = 2** y el ángulo  $\angle \mathbf{ABC}$  es de  $72^\circ$ . Se rota el triángulo **ABC** en el sentido de las manecillas del reloj fijando el vértice **B**, obteniéndose el triángulo **A'BC'**. Si **A,B,C'** son colineales y el arco **AA'** es el descrito por **A** durante la rotación, ¿cuánto vale el área sombreada?



- (a)  $\pi/6$    (b)  $\pi - 3/2$    (c)  $\pi/10$    (d)  $1 - \pi/2$    (e)  $3\pi/8$

**Problema 43.** ¿Cuántos números múltiplos de 6 menores que 1000 tienen la propiedad de que la suma de sus cifras es 21?

- (a) 6   (b) 9   (c) 12   (d) 15   (e) 18

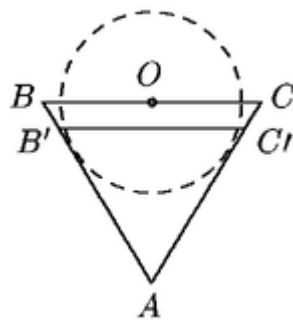
**Problema 44.** Si **x** es un número par y **y** un número impar, ¿cuál de los siguientes números no es impar?

- (a) **x+y**   (b) **x+x+1**   (c) **x<sup>2</sup>/2**   (d) **(y+y)/2**   (e) **xy+1**

**Problema 45.** ¿Cuántos números entre 5678 y 9876 tienen la propiedad de que el producto de sus cifras es igual a 343?

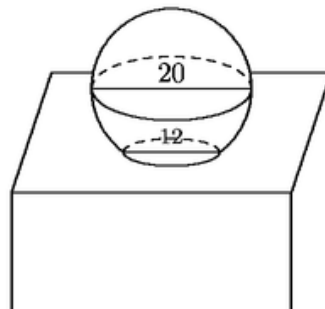
- (a) 1                      (b) 2                      (c) 3                      (d) 4                      (e) 5

**Problema 46.** Un barquillo de helado en Planilandia está formado por un triángulo **ABC** equilátero (el barquillo) y un círculo de radio 1 (la bola de nieve) tangente a **AB** y **AC**. El centro del círculo **O** está en **BC**. Cuando se derrite el helado se forma el triángulo **AB'C'** de la misma área que el círculo y con **BC** y **B'C'** paralelos. ¿Cuál es la altura del triángulo **AB'C'**?



- (a)  $\sqrt{\pi\sqrt{3}}$                       (b)  $\sqrt{3\pi}$                       (c)  $\pi\sqrt{3}$                       (d)  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$                       (e)  $\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

**Problema 47.** Una mesa tiene un agujero circular con un diámetro de 12 cm. Sobre el agujero hay una esfera de diámetro 20 cm. Si la mesa tiene 30 cm de altura, ¿cuál es la distancia en centímetros desde el punto más alto de la esfera hasta el piso?



- (a) 40 cm                      (b) 42 cm                      (c) 45 cm                      (d) 48 cm                      (e) 50 cm

**Problema 48.** Un niño corta un cuadrado de tres días por tres días de la página de un calendario. Si la suma de las nueve fechas es divisible entre 10 y sabemos que la fecha de la esquina superior izquierda es múltiplo de 4. ¿Cuál es la fecha de la esquina inferior derecha?

- (a) 2                      (b) 12                      (c) 18                      (d) 22                      (e) 28

**Problema 49.** Sea  $f$  una función de números tal que  $f(2)=3$ , y  $f(a + b) = f(a)+f(b)+ab$ , para toda  $a$  y  $b$ . Entonces,  $f(11)$  es igual a:

- (a) 22                      (b) 33                      (c) 44                      (d) 55                      (e) 66

**Problema 50.** ¿Cuál es el dígito de las unidades de

$$(1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) + \dots + (2000 + 2000^2) ?$$

- (a) 0                      (b) 2                      (c) 4                      (d) 6                      (e) 8

## 5. Solución al *CURIOSATO*

Miguel Ángel Arias Vílchez  
Giovanni Buckcanan Aguilar  
Kendrick Mitchell Maturin  
Mauricio Rodríguez Mata

**Solución 26.** Trazando las diagonales del rectángulo encontramos 12 triángulos. Cada lado del rectángulo contiene la base de 3 triángulos, uno blanco y uno gris, de la misma área, pues sus bases y sus alturas son iguales. Así, la razón de las áreas es de 1 a 2. La respuesta es (b).

**Solución 27.** El número  $10^{92}$  se escribe como un 1 seguido de 92 ceros. Entonces  $10^{92}-92$  se escribe como noventa 9's seguidos de un 0 y un 8. Tenemos que  $9 \times 90 + 0 + 8 = 818$ . La respuesta es (c).

**Solución 28.** Escribí 5 cien veces como cifra de las unidades: 5, 15, 25, ..., 95, ..., 995. Escribí 5 cien veces como cifra de las decenas: 50, ..., 59, 150, ..., 159, ..., 950, ..., 959. Escribí 5 cien veces como cifra de las centenas: 500, 501, ..., 599. En total escribí 300 veces la cifra 5. La respuesta es (e).

**Solución 29.** Por ser el número múltiplo de 5, debe terminar en 0 o 5, pero como no debe tener 0's, el número termina en 5. Ahora hay que buscar tres números cuya suma sea 4 (pues la suma de todas las cifras del número es 9); como ninguno debe ser cero la única posibilidad es que sean 1,1,2 y, como el número debe ser mayor que 1995, debe ser 2115. Por lo tanto su tercera cifra es 1. La respuesta es (a).

**Solución 30.** El segmento **MS** es la diagonal de un rectángulo, por lo cual los 2 triángulos que lo tienen como lado son de la misma área. Lo mismo pasa con **MQ** y con **QS**, lo cual implica que las áreas de los rectángulos grises siempre son iguales. La respuesta es (c).

**Solución 31.** Por ser el número múltiplo de 5, debe terminar en 0 o 5, pero como no debe tener 0's, el número termina en 5. Ahora hay que buscar tres números cuya suma sea 4 (pues la suma de todas las cifras del número es 9); como ninguno debe ser cero la única posibilidad es

que sean 1,1,2 y, como el número debe ser mayor que 1995, debe ser 2115. Por lo tanto su tercera cifra es 1. La respuesta es (a).

**Solución 32.** Hay 6 formas de ir de la ciudad **A** a la ciudad **D** pasando por **B**, y hay 10 formas pasando por **C**. Por lo tanto hay 16 rutas de la ciudad **A** a **D**. La respuesta es (b).

**Solución 33.** Tenemos tres direcciones que pueden seguir las líneas de alambre, las cuales podríamos pensar como: de izquierda a derecha, de adelante a atrás y de arriba a abajo. En cada una de estas direcciones hay 16 líneas de 3 cm cada una pues son 4 niveles y en cada nivel hay 4 líneas. De esta manera tenemos que el resultado es  $3 \times 3 \times 16 = 144$ . La respuesta es (e).

**Solución 34.** Llamemos **a** y **b** a los catetos del triángulo y **c** a su hipotenusa. Sabemos que  $c = 6$  y que  $a + b + c = 14$ . Por lo tanto  $a + b = 8$ . Elevando al cuadrado tenemos que  $(a + b)^2 = 8^2$ , lo cual implica que  $a^2 + 2ab + b^2 = 64$ . El área que buscamos es  $ab/2$ . Por el Teorema de Pitágoras  $c^2 + 2ab = 64$ , sustituyendo **c** obtenemos que  $ab/2 = 7$ , que es el área que buscábamos. La respuesta es (b).

**Solución 35.** La cantidad de días que pasan antes de que vuelvan a reunirse todos debe ser divisible por 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Si multiplicamos  $4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$  tenemos el mínimo común múltiplo los números, así, el menor número de días en el que se reencontrarán es 420. La respuesta es (d).

**Solución 36.** El área del círculo es  $\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$ . El área de la superficie delimitada por los

segmentos **AD**, **DC** y el arco **AC** es  $1 - \frac{\pi}{4}$ . El área de la región delimitada por el segmento **BC** y

el arco **BC** es la cuarta parte de restarle al área del círculo el área del cuadrado, o sea

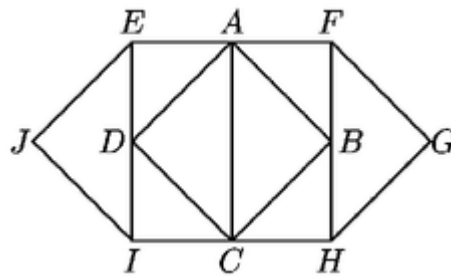
$$1 - \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{4} = 1 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \quad \text{Así, el área de la región sombreada es } 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

La respuesta es (c).

**Solución 37.** Uno de los enteros, digamos **a**, debe ser par, mientras que el otro, **b**, debe ser impar. Como  $4^3 = 64 > 57$ , tenemos que **a** = 2; entonces es fácil ver que **b** = 5. La respuesta es (b).

**Solución 38.** El triángulo **ABC** es isósceles (**AB** = **AC**), lo que implica que  $\angle ABC = \angle ACB = 75^\circ$ , y que  $\angle BAC = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$ . El triángulo **ADC** es isósceles (**AD** = **DC**), lo que implica que  $\angle DAC = \angle DCA = (180^\circ - 50^\circ)/2 = 65^\circ$ . Observemos que  $\angle BAD = \angle CAB + \angle DAC = 30^\circ + 65^\circ = 95^\circ$ . La respuesta es (d).

**Solución 39.** En la figura, el área del triángulo **ABC** es igual a la del triángulo **FGH**, y el área del triángulo **ACD** es igual a la del **EIJ**. Así, el área sombreada es igual al área del cuadrado **EFHI**, que es 9. Entonces la respuesta es (a).



**Solución 40.** Si el promedio de los cinco números es 40, entonces su suma es  $40 \times 5 = 200$ . De la misma manera, la suma de los tres que no se eliminaron es 108. Entonces, los dos eliminados suman 92 y su promedio es 46. La respuesta es (d).

**Solución 41.** Tenemos que **CANGUROS** = 10,000 x **CANG** + **UROS**, así es que

$$\begin{aligned}
 &10,000 \times \mathbf{UROS} - 10,000 \times \mathbf{CANG} + 10,000 \times \mathbf{CANG} + \mathbf{UROS} \\
 &= 10,000 \times \mathbf{UROS} + \mathbf{UROS} = \mathbf{UROSUROS}.
 \end{aligned}$$

La respuesta es (a).

**Solución 42.** El ángulo **A'BC** mide  $180^\circ - 2(72^\circ) = 36^\circ$ . Por lo tanto, la región sombreada es  $360^\circ/36^\circ = 1/10$  del área total del círculo con centro en **B** y radio **AB**, que es  $\pi(1^2) = \pi$ . El área de la región sombreada es igual a  $\pi/10$ . La respuesta es (c).

**Solución 43.** Queremos que el número sea múltiplo de 6, por tanto debe serlo de 2 y de 3. Al pedir que la suma de sus cifras sea 21 el número ya será múltiplo de 3. El número deberá además par, así es que pensemos en las posibilidades para su última cifra. El número no puede terminar en 0 ni 2 porque no tenemos posibilidades para las primeras dos cifras de forma que la suma alcance 21. Si la última cifra es 4, las dos primeras deben sumar 17, así es que deben ser 8 y 9, y hay dos combinaciones posibles: 984 y 894. Si la última cifra es 6, las primeras pueden ser 8 y 7, o bien 9 y 6, con los que se pueden formar cuatro números: 876, 786, 966 y 696. Si la última cifra es 8, las posibilidades para las primeras son 6 y 7, 5 y 8, o bien 4 y 9; y hay 6 números: 768, 678, 588, 858, 498, 948. En total hay 12 números. La respuesta es (c).

**Solución 44.**  $x^2/2$  es par siempre. Como  $x$  es par, entonces  $x$  es múltiplo de 2 y, por lo tanto,  $x^2$  es múltiplo de 4. Entonces  $x^2/2$  es múltiplo de 2, es decir, es par. La respuesta es (c).

**Solución 45.** Observemos que  $343=7^3$ . Como los números son de cuatro cifras, 3 de ellas son 7 y la otra es 1. Entonces las únicas posibilidades son 7177, 7717, 7771. La respuesta es (c).

**Solución 46.** El área del círculo es  $\pi(1^2)=\pi$ , así que estamos buscando la altura de un triángulo equilátero que tiene área  $\pi$ .  $\mathbf{AB'C'}$  es un triángulo equilátero, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa a  $\mathbf{AC'}$  y como catetos a la altura trazada desde el vértice  $\mathbf{A}$  y a la mitad del lado  $\mathbf{B'C'}$ . Si  $\mathbf{AC'}$  mide  $\mathbf{b}$  y la altura es  $\mathbf{h}$ , tenemos que  $\mathbf{h}^2 = \mathbf{b}^2 - (\mathbf{b}/2)^2 = (3/4)\mathbf{b}^2$ , de donde  $\mathbf{b} = (2/\sqrt{3})\mathbf{h}$ . El área del triángulo es  $\mathbf{hb}/2$ . Así,  $(1/\sqrt{3})\mathbf{h}^2 = \pi$  y  $\mathbf{h} = \sqrt{\frac{\pi}{(\sqrt{3})}}$ . La respuesta es (a).

**Solución 47.** Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo cuya hipotenusa es el radio de la esfera y uno de cuyos lados es el radio del agujero, vemos que la distancia desde el centro de la esfera hasta el nivel de la mesa es  $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ . Así, la distancia del punto más alto de la esfera al piso es  $10 + 8 + 30 = 48$ . La respuesta es (d).

**Solución 48.** Si la fecha menor del cuadrado es  $x$ , la suma de todas las fechas del cuadrado es

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 7 + x + 8 + x + 9 + x + 14 + x + 15 + x + 16 = 9x + 72 = 9x + 7(10) + 2.$$

Necesitamos que  $9x$  termine en 8, lo cual es posible si  $x$  termina en 2. Para que  $x$  sea múltiplo de 4 la única posibilidad es  $x = 12$ . Entonces, la fecha de la esquina inferior derecha es 28. La respuesta es (e).

**Solución 49.** Como sabemos cuánto vale  $f(2)$ , podríamos calcular  $f(11)$  si conociéramos el valor de  $f(3)$  ya que  $11 = 4+4+3 = (2 + 2) + (2 + 2) + 3$ .

Tenemos que  $f(4) = f(2 + 2) = f(2) + f(2) + 4 = 10$ . Por otra parte  $f(4) = 10 = f(3) + f(1) + 3$ , de donde  $f(3) = 7 - f(1)$ . Además  $f(3) = f(2 + 1) = f(2)+f(1)+2 = f(1) + 5$ . Tenemos dos ecuaciones que involucran a  $f(3)$  y a  $f(1)$ . Resolviendo obtenemos  $f(1) = 1$  y  $f(3) = 6$ . Entonces

$$f(4) + f(4+3) + 28 = 10 + f(4) + f(3) + 12 + 28 = 50 + 10 + 6 = 66.$$

La respuesta es (e).

**Solución 50.** En  $(1 + 12) + (2 + 22) + (3 + 32) + \dots + (2001 + 20012)$  podemos reemplazar cada número por su última cifra sin alterar la última cifra del resultado. Así, la última cifra de la suma es la misma que la última cifra de

$$200 \times ((1+12) + (2+22) + (3 + 32) + \dots + (10 + 102)) + (1 + 12) = 88002.$$

Por lo tanto, la cifra que buscábamos es 2. La respuesta es (b).

## **6. Solución a los problemas anteriores de la columna**

### **“Olimpiadas alrededor del mundo”.**

Miguel Ángel Arias Vílchez

Mauricio Rodríguez Mata.

Presentamos, a continuación, la solución de los diez problemas presentados en esta misma columna pero de la edición anterior. Hemos procurado adjuntar varias soluciones a los problemas con el fin de hacer notar que los mismos pueden ser enfocados y resueltos de diversas formas y que ello es lo que se busca en las competencias olímpicas: favorecer el pleno desarrollo de la creatividad del participante al momento de enfrentar los problemas y de ninguna manera encajonar su pensamiento.

Al mismo tiempo que se presenta una solución a determinado problema se advierte, cuando ello lo amerita, la teoría que se está aplicando en la solución del mismo con el fin de que se cuente con todo el marco teórico que se requiera para poder resolver otros problemas que puedan ubicarse en la misma categoría o bien que puedan reducirse a ellos.

Cuando se indique que la solución es oficial lo que se pretende indicar es que esa es la solución que se dio en la competencia señalada por parte del comité organizador o bien de su proponente.

Recuérdese que ningún problema está completamente cerrado por lo que se les solicita a nuestros estimables lectores que nos envíen sus comentarios o sugerencias que tengan a esta columna en particular mediante alguno de los correos indicados en la presentación.

Pues bien, veamos las soluciones de la columna anterior !!

1. Demuestre que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  es divisible por 133.

(Olimpiada Costarricense de Matemática, 1993)

SOLUCIÓN 1: por inducción matemática

Sea  $P(n) = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ , se debe demostrar que  $P(n) = 133 m$  para algún  $m$  entero positivo.

Para  $n = 0$  se tiene que  $P(n) = 11^2 + 12^1 = 133 \cdot 1$ . Con lo que la proposición es verdadera para el caso  $n = 0$ .

Para  $n = 1$  se tiene que  $P(n) = 11^3 + 12^3 = 133 \cdot 29$ . Con lo que la proposición es verdadera para el caso  $n = 1$ .

Asumimos, como hipótesis inductiva, que  $P(k) = 133 m_1$ . Debemos demostrar que la proposición es verdadera para  $n = k + 1$ . En efecto,

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 11^{k+3} + 12^{2k+3} \\ &= 11^{k+3} + 11 \cdot 12^{2k+1} - 11 \cdot 12^{2k+1} + 12^{2k+3} \\ &= 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 12^{2k+1}(-11 + 12^2) \\ &= 11 \cdot 133 m_1 + 12^{2k+1} \cdot 133 \\ &= 133(11m_1 + 12^{2k+1}) \end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que la proposición es verdadera para  $n = k + 1$ . Finalmente, concluimos que  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  es divisible por 133.

SOLUCIÓN 2: por congruencia modular.

$$11^2 \equiv -12 \pmod{133} \Rightarrow 11^{n+2} \equiv -12 \cdot 11^n \pmod{133} \quad (1)$$

$$12^2 \equiv 11 \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n} \equiv 11^n \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n+1} \equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133} \quad (2)$$

Sumando, miembro a miembro, (1) y (2) se obtiene  $11^{n+2} + 12^{2n+1} \equiv 0 \pmod{133}$ .

Por lo que se ha demostrado que  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  es divisible por 133.

SOLUCIÓN 3: por el binomio de Newton.

$$\begin{aligned} 11^{n+2} + 12^{2n+1} &= 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot (144)^n \\ &= 121 \cdot 11^n + 12 \cdot (133 + 11)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot (133m + 11^n) \text{ para algún } m \text{ entero positivo} \\ &= 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 133m + 12 \cdot 11^n = 133 \cdot 11^n + 12 \cdot 133m \\ &= 133(11^n + 12m) \end{aligned}$$

Por tanto,  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  es divisible por 133.

2. Determinar para cuáles números primos  $p$  se cumple que  $2^p + p^2$  es primo.

(Olimpiada Nacional de Matemática. Chile, 1989)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Notemos que  $p = 2$  y  $p = 3$  producen los números 8 y 17, compuesto en el primer caso y primo en el segundo. Basta considerar entonces primos  $p > 2$ .

Consideremos congruencia módulo 3. Sabemos que  $p$  debe satisfacer una y sólo una de las congruencias siguientes:

$$p \equiv 0 \pmod{3}$$

$$p \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p \equiv -1 \pmod{3}$$

Claramente, el primer caso sólo se puede dar si  $p = 3$ , puesto que de otra manera  $p$  sería un número compuesto.

Aplicando las propiedades de congruencia en cualquiera de los dos restantes casos se obtiene que  $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Por otro lado, como  $2 \equiv -1 \pmod{3}$  se obtiene  $2^p \equiv (-1)^p \pmod{3}$ . Además,  $p$  es impar, luego  $2^p \equiv -1 \pmod{3}$ . En resumen,  $2^p \equiv -1 \pmod{3}$  y  $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ . Aplicando las propiedades de las congruencias con respecto a la suma se obtiene finalmente que

$$2^p + p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

Pero entonces  $(2^p + p^2)$  es siempre divisible por 3 si  $p > 3$ . Luego, el único caso es  $p = 3$ .

3. Sean  $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$  y  $p$  un número primo impar. Pruebe que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $p$  divide a  $f(n)$  si y sólo si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $p$  divide a  $m^2 - 5$ .

(Olimpiada Mexicana de Matemática, 1994)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Es fácil ver que  $f(x) = [x(x + 3) + 1]^2$ . Así, existe  $n$  tal que  $f(n) \equiv 0 \pmod{p}$  si y solo si existe  $n$  tal que  $[n(n + 3) + 1]^2 \equiv 0 \pmod{p}$  y como  $p$  es primo, esto es cierto si y solo si existe  $n$  tal que  $n(n + 3) + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Como  $p$  es primo impar,  $(p, 4) = 1$ . Así,

$$\begin{aligned}n^2 + 3n + 1 &\equiv 0 \pmod{p} \\ \Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 4 &\equiv 0 \pmod{p} \\ \Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 9 &\equiv 5 \pmod{p} \\ \Leftrightarrow (2n + 3)^2 &\equiv 5 \pmod{p}\end{aligned}$$

Como  $(p, 2) = 1$ , multiplicar por dos y sumar tres es una bisección del conjunto de residuos módulo  $p$  en sí mismo.

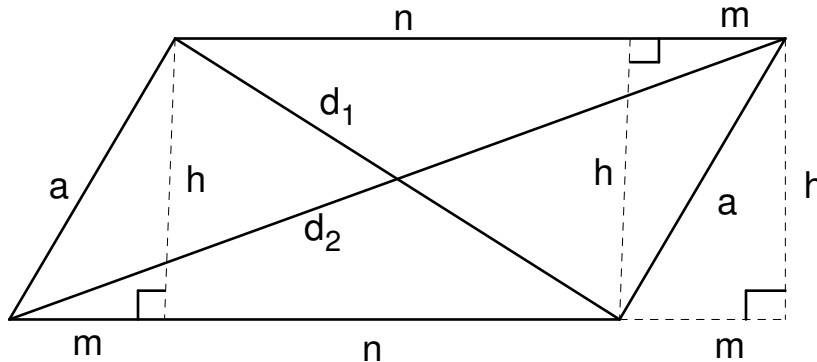
Por lo tanto existe  $n$  tal que  $f(n) \equiv 0 \pmod{p}$  si y solo si existe  $m$  tal que  $2n + 3 \equiv m \pmod{p}$  y  $m^2 \equiv 5 \pmod{p}$ .

4. Demuestre que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

(Olimpiada Costarricense de Matemática, 1995)

SOLUCIÓN 1: por el teorema de Pitágoras.

Consideremos la figura siguiente



con  $m + n = b$ . Debemos demostrar que  $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$ . En efecto, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que

$$a^2 = m^2 + h^2 \quad (1)$$

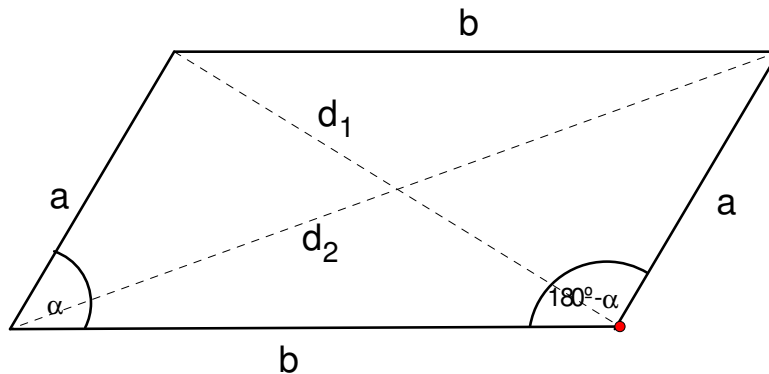
$$(2m + n)^2 + h^2 = d_2^2 \quad (2)$$

$$n^2 + h^2 = d_1^2 \quad (3)$$

Sumando (2) y (3) se obtiene  $4m^2 + 4mn + n^2 + h^2 + n^2 + h^2 = d_1^2 + d_2^2$  de donde  $4m^2 + 4mn + 2n^2 + 2h^2 = d_1^2 + d_2^2$ , sustituyendo (1) en esta última ecuación se obtiene  $2m^2 + 4mn + 2n^2 + 2a^2 = d_1^2 + d_2^2$  lo que equivale a  $2(m^2 + 2mn + n^2) + 2a^2 = d_1^2 + d_2^2$  con lo que  $2(m + n)^2 + 2a^2 = d_1^2 + d_2^2$  por tanto  $2b^2 + 2a^2 = d_1^2 + d_2^2$ .

SOLUCIÓN 2: por la ley de cosenos.

Considere la figura siguiente



aplicando la ley de cosenos tenemos  $\begin{cases} d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) \end{cases}$  que es equivalente a

$$\begin{cases} d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha \end{cases} \quad \text{sumando estas ecuaciones se obtiene } 2b^2 + 2a^2 = d_1^2 + d_2^2$$

5. Si  $f$  es una función definida en los números enteros positivos que verifica:

a)  $f(n+1) = \frac{2f(n)+1}{2}$

b)  $f(1) = 2$ .

Determine  $f(n)$  en términos de  $n$  y calcule  $f(1992)$ .

( Olimpiada Costarricense de Matemática, 1992 )

SOLUCIÓN 1: por diferencias finitas

Notemos que, de a), se tiene que  $f(n) = \frac{2f(n-1)+1}{2} = f(n-1) + \frac{1}{2} \Rightarrow f(n-1) - f(n) = \frac{1}{2}$ . Como la primera diferencia de dos términos consecutivos es constante entonces existe un polinomio de

grado uno tal que  $f(n) = an + b$ . Ahora bien,  $f(2) = \frac{2f(1)+1}{2} = \frac{5}{2}$  con lo que  $\begin{cases} f(1) = a + b = 2 \\ f(2) = 2a + b = \frac{5}{2} \end{cases}$

y, entonces,  $a = \frac{1}{2}$  ;  $b = \frac{3}{5}$  por lo que  $f(n) = \frac{n+3}{2}$  y  $f(1992) = \frac{1995}{2}$

SOLUCIÓN 2: por progresiones

De b) se tiene que  $f(n) = f(n-1) + \frac{1}{2}$ . Por lo que

$$f(n) - f(n-1) = \frac{1}{2}$$

$$f(n-1) - f(n-2) = \frac{1}{2}$$

$$f(n-2) - f(n-3) = \frac{1}{2}$$

⋮

$$f(3) - f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f(2) - f(1) = \frac{1}{2}$$

Sumando miembro a miembro estas ecuaciones se obtiene  $f(n) - f(1) = \frac{1}{2}(n-1)$  con lo que

$$f(n) - 2 = \frac{n-1}{2} \Rightarrow f(n) = \frac{n-1}{2} + 2 = \frac{n+3}{2} \quad \text{y, finalmente, } f(1992) = \frac{1995}{2}.$$

Notas:

a) puede inducirse que  $f(n) = \frac{n+3}{2}$  y demostrarse por inducción.

b) este ejercicio puede ser resuelto también utilizando la teoría de funciones por recurrencia.

6. Halle todas las ternas de enteros (a, b, c) tales que:

$$a + b + c = 24$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 210$$

$$abc = 440$$

(I Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 1985)

Solución:

Recordemos que  $(a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = a^2 + b^2 + c^2$  de donde, sustituyendo se tiene  $(24)^2 - 2(ab+ac+bc) = 210$  con lo que  $ab+ac+bc = 183$ . Sean a, b y c las raíces de una ecuación cúbica, esto es,  $(x-a)(x-b)(x-c) = 0 \Rightarrow x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$  que al sustituir los datos conocidos se obtiene la ecuación  $x^3 - 24x^2 + 183x - 440 = 0$ . Al resolver dicha ecuación se obtiene las soluciones 5, 8 y 11. Ahora bien, el sistema a resolver es simétrico en las variables a,b,c por lo que todas las ternas de enteros (a,b,c) se obtiene permutando (5,8,11).

7. Calcule la suma de todas las fracciones positivas irreducibles menores que uno cuyo denominador es 1994.

( Olimpiada Mexicana de Matemática, 1994 )

Solución:

Notemos que la suma de todos los fracciones positivas menores que denominadores es 1994

es  $\frac{1}{1994} + \frac{2}{1994} + \frac{3}{1994} + \dots + \frac{997}{1994} + \frac{998}{1994} + \dots + \frac{1993}{1994}$  pero en esta suma tenemos fracciones

que son reducibles (pueden simplificarse) como  $1994 = 2 \cdot 997$  entonces debemos restar a esa

suma las fracciones cuyo numerador sea múltiplo de 2 :  $\frac{2}{1994} + \frac{4}{1994} + \frac{6}{1994} + \dots + \frac{1992}{1994}$  y la

fracción  $\frac{997}{1994}$ , esto es, la suma buscada es:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{1994} + \frac{2}{1994} + \dots + \frac{1993}{1994} \right) - \left( \frac{2}{1994} + \frac{4}{1994} + \dots + \frac{1992}{1994} \right) - \frac{997}{1994} \\ &= \frac{1}{1994} (1 + 2 + \dots + 1993) - \frac{2}{1994} (1 + 2 + \dots + 996) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{1994} \cdot \frac{1993 \cdot 1994}{2} - \frac{2}{1994} \cdot \frac{996 \cdot 997}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1993}{2} - \frac{996}{2} - \frac{1}{2} = \frac{996}{2} = 498 \end{aligned}$$

8. En una fiesta hay 205 personas de cinco nacionalidades diferentes. En cada grupo de seis, al menos dos personas tienen la misma edad. Pruebe que hay al menos cinco personas del mismo país, de la misma edad y el mismo sexo.

(XXIX Olimpiada Española de Matemática, 1992)

**SOLUCIÓN OFICIAL:**

Si en cada grupo de 6 personas, 2 son de la misma edad, sólo puede haber 5 edades diferentes, ya que, si hubiese 6 edades diferentes, eligiendo una persona de cada edad tendríamos 6 personas de edades distintas contra la hipótesis.

Como  $200 = 2 \cdot 100 + 1 \Rightarrow$  al menos hay 101 personas del mismo sexo.

$101 = 5 \cdot 20 + 1 \Rightarrow$  al menos hay 21 personas de la misma edad y sexo.

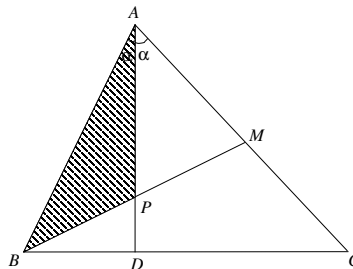
$21 = 4 \cdot 5 + 1 \Rightarrow$  al menos hay 5 personas de la misma nacionalidad, edad y sexo.

9. En el triángulo ABC, M es el punto medio del lado AC, D es un punto sobre el lado BC tal que AD es bisectriz del ángulo  $\hat{B}AC$  y P es el punto de intersección de AD y BM. Sabiendo que el área del triángulo ABC es 100,  $AB = 10$  y  $AC = 30$ , calcule el área del triángulo APB.

(XXV Olimpiada Brasileira de Matemática, 2003)

**SOLUCIÓN OFICIAL:**

Consideremos la figura adjunta



Las alturas que pasan por B de los triángulos ABC y ABM son iguales a la distancia  $d$  de B hasta la recta AC, luego

$$\frac{\text{área } ABM}{\text{área } ABC} = \frac{\frac{AM \cdot d}{2}}{\frac{AC \cdot d}{2}} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{área } ABM = \frac{1}{2} \text{área } ABC = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50.$$

Análogamente,  $\frac{\text{área } ABP}{\text{área } ABM} = \frac{BP}{BM}$ . Por el teorema de la bisectriz,  $\frac{BP}{PM} = \frac{AB}{AM} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow PM = \frac{3}{2} BP$

Luego,

$$\frac{\text{área } ABP}{\text{área } ABM} = \frac{BP}{BM} = \frac{BP}{BP+PM} = \frac{BP}{BP+\frac{3}{2}BP} = \frac{BP}{\frac{5}{2}BP} = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{área } ABP = \frac{2}{5} \text{área } ABM = \frac{2}{5} \cdot 50 = 20.$$

10. En el triángulo  $ABC$ , sean  $D, E, F$  los pies de las alturas trazadas desde  $A, B, C$  respectivamente y  $H$  su ortocentro. Pruebe que

$$\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$$

(Olimpiada Matemática Australiana, 1993)

SOLUCIÓN OFICIAL:

$$\begin{aligned} \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} &= 3 - \left( \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} \right) \\ &= 3 - \left( \frac{[BHC]}{[ABC]} + \frac{[CHA]}{[ABC]} + \frac{[AHB]}{[ABC]} \right) \\ &= 3 - \frac{[ABC]}{[ABC]} = 2. \end{aligned}$$

## 7. Olimpiadas alrededor del mundo.

Jorge Obando Toruño

José Virgilio Reyes Pérez

En esta columna, a partir de esta edición, se propondrán únicamente problemas que hayan sido parte de exámenes de competencias olímpicas, nacionales o internacionales, con esto pretendemos que otros tipos de competencias sean abordados en la columna *Problemas de Competencias no Olímpicas* (antes denominada problemas propuestos) de esta misma revista.

Es importante hacer notar que los problemas de la OLCOMA que se publican en esta revista corresponden a lo que hoy se considera el nivel C de estas competencias olímpicas y que se hará referencia a otro nivel cuando ello sea necesario.

1. En una Olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están alineados en filas y columnas de tal manera que hay más de dos filas y en cada fila hay más de dos asientos. Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano; cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que están junto a él (adelante, atrás, a los lados y en diagonal) y sólo a éstos. Alguien observa que se dieron 1020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay? (IX Olimpiada Nacional de Matemáticas de México, noviembre de 1995)

2. Encuentra todos los números primos positivos  $p$  tales que  $8p^4 - 3003$  también sea un primo positivo.

(XI Olimpiada Nacional de Matemáticas de México, noviembre de 1997)

3. Una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface  $f(x+f(y))=x+f(f(y))$  para todos los números reales  $x$  y  $y$ . Sabiendo que  $f(2)=8$ , calcule  $f(2005)$ .

(XXVII Olimpiada Brasileira de Matemática, Segunda fase del Nivel 3, 2005)

4. Cada uno de los números  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2004}$  puede ser igual a  $\sqrt{2}+10$  a  $\sqrt{2}+1$ .  
 ¿ Cuántos valores enteros distintos puede sumir la suma

$$\sum_{k=1}^{2004} x_{2k-1}x_{2k} = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \dots + x_{2003}x_{2004} ?$$

(XXVI Olimpiada Brasileira de Matemática, Segunda fase del Nivel 3, 2004)

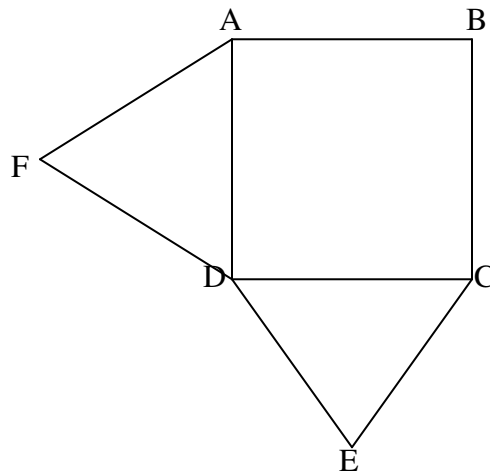
5. Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que  $2(2+\sqrt{2})$ .

(XXXIII Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional, Valencia, Marzo 1997)

6. Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo  $\alpha$  en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.

(XXXIII Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional, Valencia, Marzo 1997)

7. En la figura siguiente, [ABCD] es un cuadrado y [ADF] y [CED] son triángulos equiláteros.  
 ¿Cuál es la razón entre las áreas del triángulo [DEF] y el área del cuadrado [ABCD]?



(XXIII Olimpiada Portuguesa de Matemática, 1ª Eliminatoria Categoría B, 2004)

8. En una fila para un concierto de Súper Rock Pop estaban 2005 personas. Con el objetivo de ofrecer 3 entradas para el "backstage", se pide a la primera persona de la fila que grite "Súper", a la segunda "Rock", a la tercera "Pop", a la cuarta "Súper", a la quinta "Rock", a la sexta "Pop" y así sucesivamente. Quien dice "Rock" o "Pop" fue eliminado. Repitiendo este proceso, siempre a partir de la primera persona de la nueva fila, hasta que queden apenas 3 personas. ¿En qué posición se encontraban al inicio esas personas?

(XXIII Olimpiada Portuguesa de Matemática, Final Categoría B, 2005)

9. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = y,$$

$$y + \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = z,$$

$$z + \log\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) = x.$$

(Olimpiada Israelí de Matemática, 1995)

10.  $\alpha$  es un número real dado. Halle todas las funciones  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  tales que  $\alpha x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}$  se verifica para todo número real  $x > 0$ .

(Olimpiada Israelí de Matemática, 1995)

## **8. Lógica y Matemática Recreativa.**

Maynor Castro  
Randall Godínez.  
Arlene Martínez  
Carlos Molina  
Mauricio Ramírez  
Melissa Ramírez  
Carlos Rodríguez  
Simón Sánchez  
Erick Solano

En la columna de esta edición vamos a presentar una colección de diez ejercicios que han sido evaluados en diferentes competencias olímpicas pero siempre relacionados a la lógica y la matemática recreativa.

Es importante destacar que los ejercicios numerados del 1 al 5 han sido propuestas en fases iniciales de la OLCOMA (Olimpiada Costarricense de Matemática), los numerados 6 y 7 corresponden a ejercicios de preparación de las mismas. Con respecto al ejercicio 8, éste se propuso en una etapa final de la OLCOMA. El ejercicio numerado 9 corresponde a la XI Olimpiada regional de Matemática de Castilla y León (España, 2003) para estudiantes de 2° E.S.O (estudiantes de 12 – 13 años del programa Educación Secundaria Obligatoria) y finalmente, el ejercicio numerado 10 es tomado de la Olimpiada Británica Junior.

Pues bien, dada la anterior información de referencia procedemos con los enunciados.

1. En una conferencia internacional se reúnen 15 delegados de África, América, Asia y Europa. Cada continente envía un número diferente de delegados, y cada uno está representado, por lo menos, por un delegado. América y Asia envían un total de 6 delegados, Asia y Europa envían un total de 7 delegados. El continente que envía 4 delegados es

- a) Asia.
- b) Europa.
- c) África.
- d) América.

2. Los señores Trujillo, Lara, Bolívar y Sucre son de los lugares Trujillo, Lara, Bolívar y Sucre; pero en ningún caso el apellido coincide con el nombre del lugar de nacimiento. El nacido en Trujillo no tiene el mismo apellido que el nombre del lugar de nacimiento del señor Bolívar. El nacido en Lara no es el señor Sucre, ni tiene como apellido el nombre del lugar de nacimiento del señor Lara. Entonces podemos afirmar que el que nació en Sucre es el señor

- a) Lara.
- b) Trujillo.
- c) Bolívar.
- d) Sucre.

3. Juan tiene el mismo parentesco que Antonio tiene con el hijo de Carlos. Carlos tiene con Antonio el mismo parentesco que Antonio tiene con Juan. De las siguientes proposiciones puede ser cierto que

- a) Carlos es el nieto de Juan.
- b) Carlos es el padre de Juan.
- c) Juan es el nieto de Carlos.
- d) Juan es el padre de Carlos.

4. El señor Villanueva, el señor Becerra y el señor Espinoza viven en la casa de huéspedes de Nana Pancha. Uno es panadero, el otro es taxista y el tercero es bombero. Sabiendo que

- El señor Villanueva y el señor Becerra juegan ajedrez todas las noches.
- El señor Becerra y el señor Espinoza van juntos a los juegos de béisbol.
- El taxista colecciona monedas, el bombero soldaditos de plomo y el panadero, sellos postales.
- El taxista nunca ha ido a un juego de béisbol.
- El señor Espinoza nunca ha oído hablar de sellos certificados.

Entonces, en lo que trabaja el señor Becerra

- a) es de panadero.
- b) es de taxista.
- c) es de bombero.
- d) no es posible determinarlo.

5. Se tiene tres cofres, uno de oro, uno de plata y el último de bronce, cada uno de ellos tiene una inscripción:

COFRE DE ORO: El retrato está en este cofre.

COFRE DE PLATA: El retrato NO está en este cofre.

COFRE DE BRONCE: El retrato NO está en el cofre de oro.

Si solamente una de las inscripciones es verdadera podemos afirmar que

- a) el retrato está en el cofre de bronce.
- b) el retrato está en el cofre de plata.
- c) el retrato está en el cofre de oro.
- d) no es posible determinar en qué cofre está el retrato.

6. Alberto, Bernardo, Carlos y Diego fueron a cenar en compañía de sus respectivas esposas. En el restaurante se sentaron alrededor de una mesa redonda de forma que:

- i. ningún marido se sentó al lado de su esposa.
- ii. al frente de Alberto se sentó Carlos.
- iii. a la derecha de la esposa de Alberto se sentó Bernardo.
- iv. No había dos hombres juntos.

Quién se sentó entre Alberto y Diego es la esposa de

- a) Alberto.
- b) Diego.
- c) Carlos.
- d) Bernardo.

7. Eduardo miente los días miércoles, jueves y viernes y dice la verdad el resto de los días de la semana. Andrés miente los domingos, lunes y martes y dice la verdad el resto de los otros días de la semana. Si hoy ambos dicen: "mañana es un día en el que yo miento". El día de la semana que será mañana es

- a) Sábado.
- b) Miércoles.
- c) Martes.
- d) Viernes.

8. En una reunión internacional participaron 5 personas A, B, C, D y E y pudo observarse lo siguiente:

- a) B y C conversaban en inglés, pero cuando se acercaba D debían pasar al español, único idioma común a los tres.
- b) El único idioma común a A, B y E era el francés.
- c) El único idioma común a C y E era el italiano.
- d) Tres personas conocían el portugués.
- e) El idioma más hablado era el español.
- f) Una de las personas conocía todos los idiomas, otra conocía 4, otra 3, otra 2 y otra conocía un único idioma.

¿Cuál de ellas conocía los 5 idiomas?

9. En una cárcel hay 32 presos repartidos en ocho celdas de planta cuadrada.

1	7	1
7		7
1	7	1

En cada celda de las esquinas hay un preso y en cada una de las centrales hay siete presos.

El carcelero cuenta cada noche los presos que hay en cada hilera y se asegura de que sean nueve. Una vez hecho esto se retira a su oficina. Cierta día se fugan cuatro internos. Cuando el carcelero hace su recuento nocturno no se percató de nada, pues los presos siguen sumando nueve por hilera. ¿Qué hicieron los presos para burlar al carcelero? ¿Cómo se situaron en las celdas? Tres días más tarde se fugan otros cuatro presos. Esta vez tampoco el carcelero se dio cuenta de nada al contar. ¿Cómo volvieron a burlar al carcelero? Una semana después, el carcelero realizó su habitual recuento, le salieron las cuentas y volvió tranquilo a su oficina. A la mañana siguiente una inspección del alcalde descubrió que sólo quedaban 20 presos.

¿Qué hicieron los reclusos para burlar por tercera vez al ingenuo carcelero?

¿Hubiera sido posible una cuarta fuga?

10. Cuatro soldados heridos tienen que cruzar un puente dañado, de noche, para escapar del fuego enemigo. El puente sólo soporta el paso de 2 soldados al mismo tiempo; cuando lo cruzan, lo hacen a la velocidad del más lento. Los cuatro soldados sólo tienen una linterna, que deben llevar siempre para cruzar el puente. Si los cuatro soldados tardan, individualmente, 1, 2, 4 y 6 minutos en cruzar el puente, ¿cuál es el mínimo tiempo necesario para que los cuatro crucen el puente?