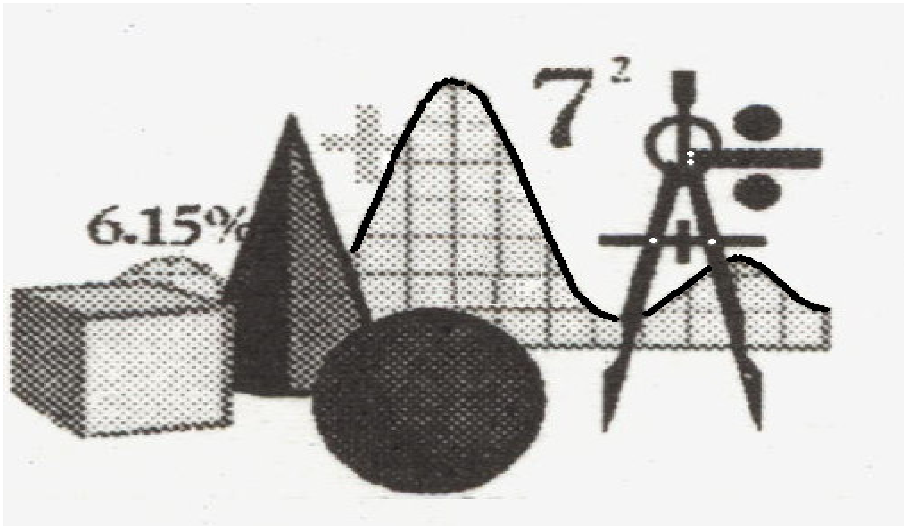


Sociedad Ramamsem

Problemas de Matemática para Competencias olímpicas

Elaborado por :

Miguel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Jorge Obando Toruño
José Virgilio Reyes Pérez
Mauricio Rodríguez Mata

III TRIMESTRE DEL 2006

CONTENIDO

1. Presentación.

A partir de esta publicación, la *SOCIEDAD RAMAMSEM* les comunica a sus estimables lectores que el formato de algunas columnas sufrirá algunos cambios al igual que su nombre.

En esta tercera publicación del año, aún no se ha adicionado la nueva columna en donde se proponen diez problemas que nos remitan nuestros lectores pues no hemos recibido el material suficiente para su publicación y algunos de los problemas enviados no satisfacen los requerimientos establecidos, éstas son:

1. Debe ser enviado a alguno de los correos electrónicos de la sociedad que se encuentran al final de esta presentación y antes del 30 del mes anterior.
2. Debe estar digitado en procesador WORD y en letra ARIAL número 12.
3. Debe venir el nombre completo del proponente y su lugar de trabajo o estudio.
4. Debe adjuntarse, al menos, una solución del mismo.

En caso de que un problema, enviado por algún lector, sea seleccionado se publicará el nombre de quien lo propone. Del mismo modo, cuando se reciban soluciones a un problema por parte de los lectores se seleccionará una de ellas, de acuerdo con los criterios que un comité de la *SOCIEDAD RAMAMSEM* empleará, para ser publicada respetando la correspondiente autoría además del nombre de los demás lectores que resolvieron el problema y la solución ofrecida por el proponente.

Por otro lado, tanto los 30 problemas de la sección **Problemas de Competencias no Olímpicas** como los 10 problemas de la sección **Olimpiadas alrededor del mundo** de cada publicación trimestral serán resueltos en el próximo ejemplar para que los lectores puedan participar enviando las soluciones y / o comentarios a algunos de ellos para su publicación.

Esta publicación es realizada por la Sociedad RAMAMSEM y va dirigida a todas aquellas personas que deseen explorar una matemática diferente a la que se enseña en secundaria, y algo más !

Toda comunicación o información con respecto a los problemas propuestos o soluciones, pueden ser enviados a

ramamsem@latinmail.com o bien ramamsem@costarricense.cr

2. Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna, que antes se denominaba *Enunciado de los problemas propuestos*, tendrá a partir de esta publicación un nuevo formato el cual consistirá en que los ejercicios propuestos se separarán por categorías (Álgebra, Geometría, Teoría de Números y Funciones o Sucesiones) y por nivel de dificultad.

Por otro lado, la solución de los mismos se presentará hasta la próxima edición con la finalidad de que nuestros lectores participen activamente enviándonos soluciones y / o comentarios que puedan enriquecer la discusión de cada ejercicio. Sin embargo, de no darse esa participación en algunos ejercicios, se publicará, al menos, una solución oficial brindada por los encargados de esta sección.

ÁLGEBRA.

1. Resolver la ecuación: $\log_2 x = \log_4 (x+1)$.

(Círculo Matemáticos Rusos, primer nivel, 1999)

2. Los números positivos x y y satisfacen $xy = 1$. Halle el mínimo valor de $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{4y^4}$.

(Alberta High School Mathematics Competition, 1995)

3. Si $4 \leq x \leq 6$ y $2 \leq y \leq 3$, halle el menor valor de $(x - y)(x + y)$.

(The Eleventh W. J. Blundon Contest, 1994)

4. Pruebe que para todo número real x se cumple: $x^4 \geq 4x - 3$.

(Canadian Mathematical Society Prize Exam, 1996)

5. Determine el número diferente de tripletas de enteros positivos (x, y, z) que satisfacen las ecuaciones $x^2 + y - z = 100$ y $x + y^2 - z = 124$.

(Alberta High School Mathematics Competition, 1995)

6. x e y son enteros entre 10 y 100. y es el número obtenido al invertir los dígitos de x. Si $x^2 - y^2 = 495$, halle x e y.

(The Manitoba Mathematical Contest, Grade 12, 1995)

7. Un polinomio cúbico P es tal que P(1) = 1, P(2) = 2, P(3) = 3 y P(4) = 5. Halle el valor de P(6).

(Alberta High School Mathematics Competition, 1995)

8. Resuelva la ecuación $(x^2 - 5x + 5)^{3x - 5} = (x^2 - 5x + 5)^{3 - 2x}$.

(CEOC, 1996)

9. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sqrt{2^{4\log(x+y)}} + \sqrt{2^{2\log(10x+10y)}} = 80$$

$$\sqrt{3^{4\log(x-y)}} + \sqrt{3^{2\log(10x-10y)}} = 54$$

(CEOC, 1996)

10. Si $x^y \cdot y^x = y^4$; $x^{y+1} = \left(\sqrt{y}\right)^{x+3}$, determine el valor numérico de

$$L = \frac{1}{x}\left(\frac{5y+8}{3y+2}\right)$$

(CEOC, 1996)

GEOMETRÍA.

1. Tres puntos P, Q y R están sobre una circunferencia. Si PQ = 4 y $\angle$ PRQ = 60°, halle la medida del radio del círculo.
(The Manitoba Mathematical Contest, Grade 12, 1995)

2. El ángulo A de un triángulo ABC mide 57°. La bisectriz interior del ángulo B y la mediatriz de lado BC, se intersecan ambas en un mismo punto del lado AC, determine la medida del ángulo B
(CEOC, 1996)

3. Hallar el volumen de un cubo sabiendo que en su interior se ha tomado un punto tal que la suma de las distancias a sus seis caras es de 12 cm.
(CEOC, 1996)

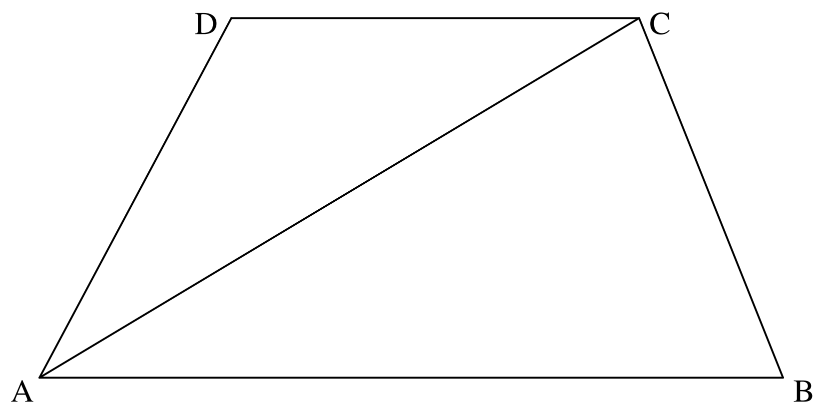
4. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior AQ (Q está en BC), luego por B se traza BH perpendicular a dicha bisectriz (H está en AQ), determine la longitud de BC, sabiendo que BQ = 13 m, HQ = 5 m y QC = AQ.
(CEOC, 1996)

5. Sean $a \leq b \leq c$ las longitudes de un triángulo rectángulo, S su semiperímetro y A su área. Pruebe que $S(S-c) = S(S-a)(S-b) = A.$
(Círculo Matemáticos Rusos, primer nivel, 1999)

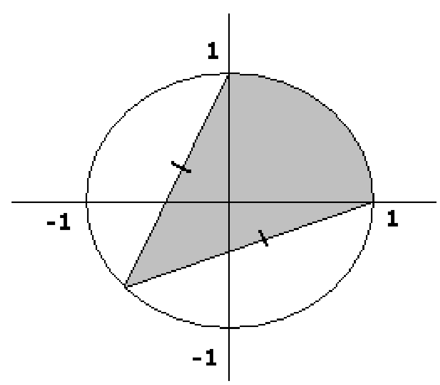
6. En un triángulo rectángulo de lados 3, 4, 5 se traza del incentro una perpendicular a la hipotenusa, uniendo luego el incentro con el punto medio de la hipotenusa. Si α es el ángulo entre las rectas trazadas, determine el valor de tan α. (CEOC, 1996)

7. En un paralelogramo ABCD, la bisectriz del ángulo $\angle$ ABC interseca a AD en P. Si PD = 5, BP = 6 y CP = 6, halle AB.
(Memorial University Undergraduate Mathematics Competition, 1997)

8. Dada la siguiente figura, en donde los segmentos AB y CD son paralelos, AD = DC = CB y AB = AC. Determine m $\angle$ ADC.
(Kangourou Des Mathématiques, 1996)



9. Halle el área de la región destacada con gris.
P.E.I. Mathematics Competition, 1995)



10. ABCD es un cuadrilátero con AB = AD = 25 cm, CB = CD = 52 cm y DB = 40 cm. Determine AC.
(The Mathematical Association National Mathematics Contest, 1994)

TEORÍA DE NÚMEROS.

1. Determine el dígito de las unidades de $26^{26} + 33^{33} + 45^{45}$.
(The Eleventh W.J. Blundon Contest, 1995)

2. Halle todos los enteros positivos n tales que 2n + 3 es un divisor de 6n + 43.
(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, 2000)

3. Determine cuál de los siguientes números es mayor: 999 ! ó 500^{999}.
(The Mathematical Association National Mathematics Contest, 1994)

4. Determine todos los enteros n tales que $n^2 - 11n + 63$ es un cuadrado perfecto.
(Junior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, 2000)

5. Determine el mayor entero n tal que la suma de los cubos de sus dígitos (en base 10) sea mayor que n.
(Maritimes Mathematics Competition, 1999)

FUNCIONES O SUCESIONES.

1. Sea f una función que satisface f (f(x)) = f (x + 2) – 3 para todo entero x Si f(1) = 4 y f(4) = 3 entonces determine f(5).
(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1996)

2. Dado que f(x + 1) – f(x) = 4x + 5 y f(0) = 6, determine f(x).
(J.I.R MC Knight Problems Contest, 1996)

3. Dado que $g\left(\frac{x}{2}\right)-3g\left(\frac{2}{x}\right)=16x,$ determine $g(x).$

(J.I.R MC Knight Problems Contest, 1996)

4. Una sucesión de números enteros está definida por

    a) $x_1 = 2,$
    b) $x_2 = 5,$
    c) $x_k = x_{k-1} + 2x_{k-2}$ para todo $k > 2.$

Pruebe que $x_n = \dfrac{7 \cdot 2^{n-1} + (-1)^n}{3}$

(J.I.R MC Knight Problems Contest, 1987)

5. Sea $\{a_n\}$ una sucesión definida por:

a) $a_0 = 0$

b) $a_1 = 1$

c) $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1},$ para n = 1, 2, 3, …

Pruebe que $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$ para todo $n \geq 1.$

(CEOC, 1994)

3. CURIOSATO.

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

Esta nueva columna, que se inicia con esta edición, tiene como finalidad mostrar ejercicios de preparación o competencia olímpicas en fases iniciales que se desarrollan en otros países.

Estos tipos de ejercicios son de selección única y se procurará brindar la solución de todos los ejercicios que se propongan. Es importante hacer notar que los mismos pueden servir de preparación para estudiantes que participan en los distintos niveles de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Estos ejercicios corresponden a los Problemas Introductorias de la Olimpiada Sonorense de Matemática, estado de la República de México.

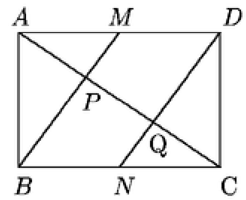
Problema 1. Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del pastel que hay en el momento de cortar. ¿Qué fracción del pastel original quedó después de cortar tres veces?

(a) 2/3 (b) 4/3 (c) 4/9 (d) 8/9 (e) 8/27

Problema 2. Un costal está lleno de canicas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando canicas del costal. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 canicas del mismo color?

(a) 1960 (b) 1977 (c) 1981 (d) 1995 (e) 2001

Problema 3. En el rectángulo de la figura, **M** y **N** son los puntos medios de **AD** y **BC**, respectivamente, y **P** y **Q** son las respectivas intersecciones de **AC** con **BM** y con **ND**. Suponiendo que **AD** mide 5cm y que **AB** mide 3cm, ¿cuántos centímetros tiene de superficie el cuadrilátero **MPQD**?

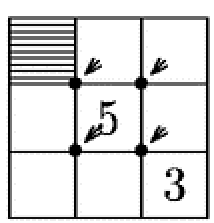


(a) 2.75 (b) 3 (c) 3.25 (d) 3.75 (e) 4

Problema 4. A una cantidad le sumo su 10%, y a la cantidad así obtenida le resto su 10%. ¿Qué porcentaje de la cantidad original me queda?

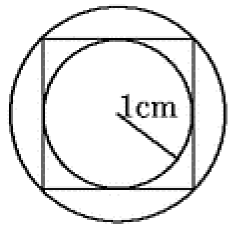
(a) 98 (b) 99 (c) 100 (d) 101 (e) 102

Problema 5. Dentro del cuadrado de la figura se escriben los números enteros del 1 al 9 (sin repetir). La suma de los 4 números alrededor de cada uno de los vértices marcados con flechas tiene que ser 20. Los números 3 y 5 ya han sido escritos. ¿Qué número debe ir en la casilla sombreada?



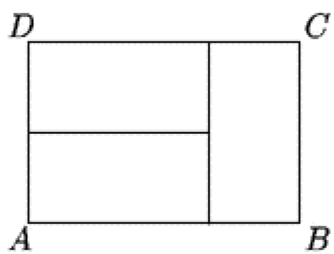
(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 7 (e) 9

Problema 6. Un círculo cuyo radio mide 1 cm está inscrito en un cuadrado, y éste a su vez está inscrito en otro círculo, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros mide el radio de éste último círculo?



(a) 1 (b$\sqrt{2}$ (c)$\sqrt{2}/2$ (d)$\sqrt{3}$ (e)$\sqrt{3}/2$

Problema 7. Con tres rectángulos iguales se formó un rectángulo más grande, como el que se muestra en la figura. Si la longitud **BC** = 2, ¿Cuál es la longitud de **AB**?

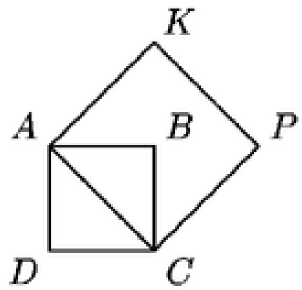


(a) 2.5 (b) 3 (c) 3.5 (d) 4 (e) 4.5

Problema 8. La suma de tres números impares consecutivos es igual a 27. ¿Cuál es el número más pequeño de esos tres?

(a) 11 (b) 9 (c) 8 (d) 7 (e) 5

Problema 9. Cada lado del cuadrado **ABCD** mide 1 m. ¿Cuál es el área del cuadrado **AKPC**?



(a) 1 m^2 (b) 1.5 m^2 (c) 2 m^2 (d) 2.5 m^2 (e) 3 m^2

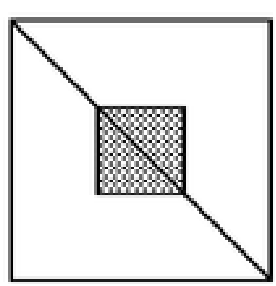
Problema 10. Utilizando cada una de las cifras 1, 2, 3 y 4 se pueden escribir diferentes números, por ejemplo, podemos escribir 3241. ¿Cuál es la diferencia entre el más grande y el más pequeño de los números que se construyen así?

(a) 2203 (b) 2889 (c) 3003 (d) 3087 (e) 3333

Problema 11. Si se dibujan un círculo y un rectángulo en la misma hoja, ¿cuál es el máximo número de puntos comunes que pueden tener?

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 8

Problema 12. En la figura, el área del cuadrado de mayor tamaño es igual a 1 m^2. Una de sus diagonales se divide en tres segmentos de la misma longitud. El segmento de en medio es la diagonal del pequeño cuadrado gris. ¿Cuál es el área del cuadrado pequeño?



(a) 1/10 m^2 (b) 1/9 m^2 (c) 1/6 m^2 (d) 1/4 m^2 (e) 1/3 m^2

Problema 13. 99 - 97 + 95 - 93 + ... +3 - 1 =

(a) 48 (b) 64 (c) 32 (d) 50 (e) 0

Problema 14. Una sala de cine tiene 26 filas con 24 asientos cada una. El total de los asientos se numera de izquierda a derecha, comenzando por la primera fila y hacia atrás. ¿En qué número de fila está el asiento número 375?

(a) 12 (b) 13 (c) 14 (d) 15 (e) 16

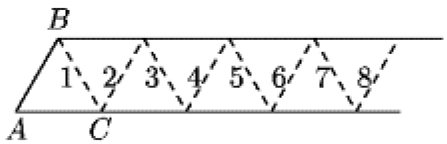
Problema 15. El boleto de entrada al Palacio de las Ciencias cuesta 5 pesos por niño y 10 pesos por adulto. Al final del día 50 personas visitaron el Palacio y el ingreso total de las entradas fue de 350 pesos. ¿Cuántos adultos visitaron el Palacio?

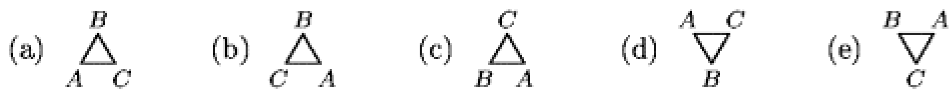
(a) 18 (b) 20 (c) 25 (d) 40 (e) 45

Problema 16. A un cuadrado de papel se le cortan todas las esquinas ¿Cuál es el máximo número de esquinas que puede quedar?

(a) 0 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Problema 17. La figura representa una tira larga de papel dividida en 2001 triángulos marcados con líneas punteadas. Supongamos que la tira será doblada siguiendo las líneas punteadas en el orden indicado por los números, de forma que la tira siempre quede en posición horizontal y la parte de la izquierda que ya ha sido doblada se dobla hacia la derecha. ¿Cuál es la posición en que terminan los vértices **A**,**B**,**C** después de 1999 dobleces?





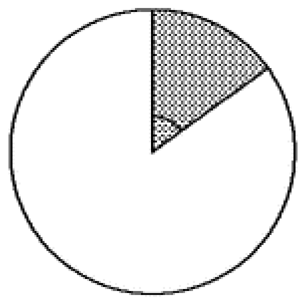
Problema 18. Dos triángulos equiláteros iguales se pegan por un lado. Después todas las esquinas de la figura obtenida se juntan en el centro. ¿Qué figura se obtiene?

(a) un triángulo (b) una estrella (c) un rectángulo (d) un hexágono (e) un rombo

Problema 19. El entrenador más experimentado del circo necesita 40 minutos para lavar un elefante. Su hijo lleva a cabo la misma tarea en 2 horas. ¿Cuántos minutos tardarán el entrenador y su hijo en lavar 3 elefantes trabajando juntos?

(a) 30 (b) 45 (c) 60 (d) 90 (e) 100

Problema 20. Me comí una rebanada de un pastel redondo que representaba el 15 % del pastel, como indica la figura. ¿Cuál es ángulo que abarca la rebanada del pastel?



(a) 15^o (b) 36^o (c) 45^o (d) 54^o (e) 60^o

Problema 21. Si 800 pesos tienen el mismo valor que 100 libras y 100 pesos tienen el mismo valor que 250 dólares, ¿cuántas libras valen lo mismo que 100 dólares?

(a) 2 (b) 5 (c) 10 (d) 25 (e) 50

Problema 22. Una acción en la bolsa de valores vale 1499 pesos en mayo. De mayo a junio la acción aumenta un 10 %. De junio a julio la acción disminuye un 10 %. ¿Cuántos pesos vale a fin de julio?

(a) 1450 (b) 1400 (c) 1390 (d) 1386 (e) 1376

Problema 23. Si efectuamos el producto de todos los números impares comprendidos entre 1 y 1994, ¿cuál es la cifra de las unidades del número así obtenido?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Problema 24. ¿Qué dígitos hay que eliminar en el número 4921508 para obtener el número de tres dígitos más pequeño posible?

(a) 4, 9, 2, 1 (b) 4, 2, 1, 0 (c) 1, 5, 0, 8 (d) 4, 9, 2, 5 (e) 4, 9, 5, 8

Problema 25. En una tira de papel rectangular se dibujan líneas verticales que la dividen en 4 partes iguales. También se dibujan líneas verticales que la dividen en 3 partes iguales. Finalmente, se corta la tira siguiendo las las líneas dibujadas. ¿Cuántos pedazos de diferente longitud se tienen?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

4. Solución al *CURIOSATO*

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

Solución 1. En cada corte quedan 2/3 de lo que había antes de cortar, así que la respuesta es 2/3 x 2/3 x 2/3 = 8/27. La respuesta es (e).

Solución 2. Notemos que si sacáramos 20 canicas podría ser que todas fueran de colores distintos, así que sólo podríamos garantizar que hay dos canicas del mismo color si sacáramos 21 canicas. De la misma manera, necesitaríamos 41=20 x 2 + 1 canicas para poder afirmar que con seguridad hay 3 canicas (al menos) del mismo color, pues con 40 canicas podría ser que cada color apareciera exactamente 2 veces. Con el mismo razonamiento que hemos seguido llegamos al resultado: se necesitan 20 x 99 + 1=1981 canicas. La respuesta es (c).

Solución 3. Observemos que si juntamos los triángulos **ABM** y **DNC**, éstos formarán un rectángulo de 2.5 x 3, y que el área de **MPQD** es la mitad del área restante **MBND** para el rectángulo total, esto es: 5 x 3 - (2.5 x 3/2)=3.75. La respuesta es (d).

Solución 4. En el primer paso, por cada 100 tendremos 110, a los cuales habrá que restarles 11 y, por tanto, nos quedaremos con 99. La respuesta es (b).

Solución 5. Junto al 3 y al 5 hay que escribir dos números que sumen 12. Como no puede haber repeticiones, la única posibilidad para esos dos números es 8 y 4 (con dos posibilidades para ponerlos). Ahora, junto al 5 y al 8 hay que escribir números que sumen 20-(5+8)=7. Para evitar repeticiones las únicas posibilidades son 1 y 6. De la misma manera, vecinos al 5 y al 4 debemos escribir 2 y 9. Ahora, una vez que se ha elegido la forma de escribir el 4 y el 8, hay 4 posibilidades para escribir los números 1 y 6 y 2 y 9, pero sólo una funciona, ya que los cuatro números en la esquina izquierda superior deben también sumar 20. En resumen, sólo hay dos posibilidades: La respuesta es (d).

Solución 6. Del centro de los círculos tracemos segmentos a los puntos de tangencia del círculo menor con el cuadrado; así el cuadrado quedará dividido en cuatro cuadrados de lado 1, y el radio del círculo mayor será igual a la diagonal de cualquiera de ellos. Usando Pitágoras deducimos el resultado. La respuesta es (b).

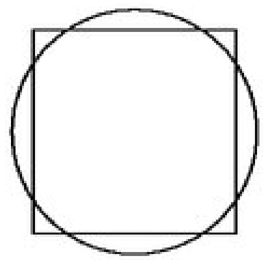
Solución 7. La longitud de **AB** es la suma de la longitud del lado mayor y la del lado menor de uno de los rectángulos pequeños. Sabemos que los tres rectángulos pequeños son iguales, por lo cual el lado más chico de cada uno de ellos mide la mitad de **AD**, que es igual a la mitad de **BC** y por tanto es 1. Luego, **AB** = 2+1=3. La respuesta es (b).

Solución 8. Conviene escribir los números como **x - 2**, **x** y **x + 2**. Entonces su suma es, por un lado, 3**x** y, por el otro, 27, de donde **x** = 9. El más pequeño es 7. La respuesta es (d).

Solución 9. El área del cuadrado **ABCD** es igual a 1 m^2 (cada lado del cuadrado mide 1 m). El área del cuadrado **AKPC** es igual a cuatro veces el área del triángulo **ABC**, cuya área es la mitad del cuadrado **ABCD**. El área de **ABCD** es igual a 0.5 x 4 m^2 =2 m^2. La respuesta es (c).

Solución 10. Tenemos que 4321 - 1234 = 3087. La respuesta es (d).

Solución 11. Es claro que una recta interseca a lo más dos veces a un círculo, así que el máximo número de intersecciones en total entre el cuadrado y el círculo no puede exceder 8. En la figura siguiente podemos observar que sí es posible conseguir 8 puntos de intersección con un círculo de radio 5 y un cuadrado de lado 8 que compartan el centro. La respuesta es (d)



Solución 12. Cada lado del cuadrado gris mide la tercera parte del cuadrado grande, así que el área del cuadrado es 1/3 x 1/3= 1/9 veces el área del cuadrado mayor. La respuesta es (b).

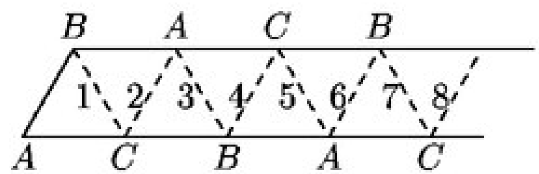
Solución 13. Tenemos 50 números que podemos agrupar de dos en dos: (99-97)+(95-93)+...+(3-1). Cada paréntesis contribuye en 2 a la suma, así que la respuesta es 25 x 2=50. La respuesta es (d).

Solución 14. Como 15 x 24 = 360 y 375 = 360 + 15, el asiento número 375 es el 15 de la fila 16. La respuesta es (e).

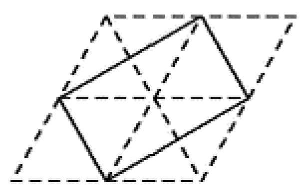
Solución 15. Notemos que 350 pesos son 35 entradas de adultos, pero 50 personas implican 15 personas más. Si "cambiamos" un adulto por 2 niños, conservamos la cantidad (en pesos) pero aumentamos una persona más cada vez. Así, "cambiando" 15 adultos por 30 niños obtenemos 50 personas, y conservamos los 350 pesos de ganancias. (De otra manera: Llamemos **n** al número de niños y **a** al número de adultos. Entonces **n + a = 50** y **5n + 10a = 350**. Dividiendo la segunda ecuación entre 5 y restándole la primera tenemos que **a** = 20. La respuesta es (b).

Solución 16. Si cortamos una esquina del triángulo de forma que el corte NO se haga por la diagonal del cuadrado, tendremos cinco esquinas en lugar de cuatro en la región más grande. Esto quiere decir que al cortar una esquina del cuadrado, lo más que podemos hacer es agregar otra. Así pues, el máximo de esquinas que podemos tener es 8. La respuesta es (e).

Solución 17. La posición original se repite después de cada 6 dobleces. Como 1998 es múltiplo de 6, después de 1998 dobleces tendremos la posición original y después de 1999 dobleces tendremos la misma posición que había después del primer doblez. La respuesta es (d).



Solución 18. Un rectángulo, como se observa en la figura. La respuesta es (b).



Solución 19. En dos horas el entrenador lava 3 elefantes y su hijo lava 1, así que juntos lavan 4 elefantes en 2 horas y lavarán 3 elefantes en **3 x 2/4 = 1.5** horas. La respuesta es (d).

Solución 20. El área de la rebanada es proporcional al ángulo comprendido entre los radios. Así, cuando el ángulo es de 360^o, el área de la rebanada es igual a la del pastel. Entonces, para que el sector sea el 15 % del área del círculo, el ángulo debe medir 15 % de 360^o: 54^o. La respuesta es (c).

Solución 21. 100 pesos tienen el mismo valor que 100/8 = 12.5 libras. 12.5 libras equivalen a 250 dólares, así que 100 dólares tienen el mismo valor que 12.5/2.5 = 5 libras. La respuesta es (b).

Solución 22. Una acción vale 1400 + 140 a fin de junio, o sea 1540 pesos. Después pierde el 10 % de su valor que son 154 pesos, o sea que al final vale 1386 pesos. La respuesta es (d).

Solución 23. Todo número impar multiplicado por 5 termina en 5. El producto de números impares siempre es impar. Por lo anterior el producto termina en 5. La respuesta es (c).

Solución 24. Para las centenas tenemos cinco opciones: 4, 9, 2, 1 y 5. La menor de ellas es 1, así que eliminamos los que están antes que 4, 9 y 2. Para las decenas hay dos opciones: 5 y 0, de las cuales la menor es 0, así que eliminamos el 5. Queda el número 108. La respuesta es (d).

Solución 25. Dibujamos los cuartos de la tira de papel y los numeramos de izquierda a derecha. Si cortamos por esas marcas, quedan los cuatro pedazos numerados, todos del mismo tamaño. Ahora, las marcas que dividen el papel en terceras partes quedan en los pedazos número 2 y 3, y, si volviéramos a unirlos, las marcas serían simétricas, por lo que, al cortarlos nuevamente, ambos pedazos (2 y 3) quedarían divididos de la misma forma. Pero este último corte dividió cada segmento en dos pedazos de longitudes diferentes además de los pedazos 1 y 4 que son de igual longitud. Por lo tanto hay piezas de tres longitudes diferentes. La respuesta es (b).

5. Solución a Selección de problemas.

Jorge Obando Toruño

José Virgilio Reyes Pérez

Presentamos, a continuación, la solución de los diez problemas presentados en esta misma columna pero de la edición anterior. Hemos procurado adjuntar varias soluciones a los problemas con el fin de hacer notar que los mismos pueden ser enfocados y resueltos de diversas formas y que ello es lo que se busca en las competencias olímpicas: favorecer el pleno desarrollo de la creatividad del participante al momento de enfrentar los problemas y de ninguna manera encajonar su pensamiento.

Al mismo tiempo que se presenta una solución a determinado problema se advierte, cuando ello lo amerita, la teoría que se está aplicando en la solución del mismo con el fin de que se cuente con todo el marco teórico que se requiera para poder resolver otros problemas que puedan ubicarse en la misma categoría o bien que puedan reducirse a ellos.

Cuando se indique que la solución es oficial lo que se pretende indicar es que esa es la solución que se dio en la competencia señalada por parte del comité organizador o bien de su proponente.

Recuérdese que ningún problema está completamente cerrado por lo que se les solicita a nuestros estimables lectores que nos envíen sus comentarios o sugerencias que tengan a esta columna en particular mediante alguno de los correos indicados en la presentación.

Pues bien, veamos las soluciones de la columna anterior !!

1. Dado el polinomio p(x) = $x^3 + Bx^2 + Cx + D$, pruebe que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D = C^3$.

(Olimpiada Matemática Española, Fase Local 2003)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Llamemos r, s y t a las tres raíces.

El polinomio lo podemos escribir así:

$$p(x) = (x-r)(x-s)(x-t).$$

Si operamos

$$p(x) = x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+st+tr)x - rst$$

e igualamos coeficientes, obtenemos las conocidas relaciones de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases} r + s + t = -B \\ rs + st + tr = C \\ rst = -D \end{cases}$$

Y como $r^2 = st$, quedan así: $\begin{cases} C = rs + r^2 + tr = r(s+r+t) = -rB \\ -D = rst = r^3 \end{cases}$

Finalmente, elevando al cubo esta primera expresión conseguimos lo pedido:

$$C^3 = (-rB)^3 = -r^3B^3 = B^3D$$

SOLUCIÓN 2: (brindada por José Virgilio Reyes Pérez)

Sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de p(x) = $x^3 + Bx^2 + Cx + D$ entonces, por las fórmulas de Viêta, se tiene que

$$x_1 + x_2 + x_3 = -B \qquad (1)$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = C \qquad (2)$$

$$x_1 x_2 x_3 = -D \qquad (3)$$

Por otro lado, de acuerdo con el enunciado, se tiene que $x_1^2 = x_2 x_3$ (4).

De (1) se tiene $x_2 + x_3 = -x_1 - B$ (5).

De (2) se tiene que $x_1 (x_2 + x_3) + x_2 x_3 = C$ (6).

Sustituyendo (4) y (5) en (6) se tiene $x_1 (-x_1 - B) + x_1^2 = C$ de donde $-Bx_1 = C$ (7).

Ahora bien, sustituyendo (4) en (3) se tiene $x_1^3 = -D$ (8).

Elevando al cubo (7) se obtiene $-B^3x_1^3 = C^3 \Rightarrow -B^3 \cdot -D = C \Rightarrow B^3 \cdot D = C$

2. Si p es un número real y las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, halla dichas raíces.
(Olimpiada Matemática Española, Fase Local 2002)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Sean a, $\frac{a+c}{2}$ y c dichas raíces. Así pues,

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = (x-a)\left(x - \frac{a+c}{2}\right)(x-c),$$

de donde, identificando coeficientes llegamos a:

$$(a+c)\frac{3}{2} = -2p \text{ (1)}; \quad \frac{(a+c)^2}{2} + ac = -p \text{ (2)}; \quad (a+c)\frac{ac}{2} = -10 \text{ (3)}.$$

De (1) y (3) sigue que

$$\frac{ac}{3} = \frac{5}{p}$$

y como

$$a + c = -\frac{4p}{3},$$

llevando estos valores de $a + c$ y ac a (2) podemos concluir que $16p^3 + 18p^2 + 270 = 0$, es decir, $8p^3 + 9p^2 + 135 = 0$. Una raíz real de este polinomio es $p = -3$ y como $8p^3 + 9p^2 + 135 = (p + 3)(8p^2 - 15p + 45)$, sigue que $p = -3$ es la única raíz real de dicho polinomio. Esto nos lleva a $ac = -5$, $a + c = 4$, de donde a y c son 5 y –1 y las raíces que nos piden son –1, 2 y 5.

SOLUCIÓN 2: (brindada por Jorge Obando Toruño)

Sean a – d, a, a + d las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ entonces, por las fórmulas de Viêta, se tiene que

$$a - d + a + a + d = -2p \Rightarrow 3a = -2p \Rightarrow a = \frac{-2}{3}p \qquad (1)$$

$$(a - d)a + (a - d)(a + d) + a(a + d) = -p \Rightarrow 3a^2 - d^2 = -p \quad (2)$$

$$(a - d)(a + d)a = -10 \Rightarrow (a^2 - d^2)\, a = -10 \quad (3)$$

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene: $d^2 = \frac{4}{3}p^2 + p$ (4).

Sustituyendo (4) en (3) se obtiene: $\left(\frac{4}{9}p^2 - \frac{4}{3}p^2 - p\right)\cdot\frac{-2}{3}p = -10$ de donde se obtiene la ecuación $16p^3 + 18p^2 + 270 = 0$ cuya única solución real es -3 con lo que $a = 2$, $d = 3$ y las soluciones de la ecuación original son $a - d = -1$, $a = 2$ y $a + d = 5$.

3. Demuestre que para cualquier entero positivo n, el número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804.

(I Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 1987)

SOLUCIÓN 1: (brindada por José Virgilio Reyes Pérez)

Notemos que $3804 = 2^2 \cdot 3 \cdot 317$ y que el factor $n^3 - n = n(n + 1)(n - 1)$ es divisible por 6 ya que siendo el producto de tres números enteros consecutivos al menos uno de ellos es par (por consiguiente divisible entre dos) y uno de ellos es múltiplo de tres. El problema se ha reducido ahora a demostrar que $5^{8n+4} + 3^{4n+2}$ es múltiplo de 634 para ello basta con notar que

$$5^{8n+4} + 3^{4n+2} = (5^4)^{2n+1} + (3^2)^{2n+1} = 625^{2n+1} + 9^{2n+1} \quad (1)$$

Por otro lado, una expresión binomial es aquella de la forma $a^n \pm b^n$.

Analizaremos las expresiones del tipo anterior, en donde a y b son números enteros y n es un entero positivo, en cuanto a su divisibilidad por otros binomios:

Propiedad 1: $a^n - b^n$ es siempre divisible por $a - b$.

En efecto, sabemos que

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

de donde, por la definición de divisibilidad se concluye lo que afirma la propiedad.

Propiedad 2: $a^n + b^n$ es siempre divisible por $a + b$ siempre que n sea impar.

En efecto, sabemos que si n es impar

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

de donde, por la definición de divisibilidad se concluye lo que afirma la propiedad.

Propiedad 3: $a^n - b^n$ es siempre divisible por $a + b$ siempre que n sea par.

Así, aplicando la propiedad 2 a la expresión (1)se tiene que

$$5^{8n+4} + 3^{4n+2} = (625 + 9)(625^{2n} - 625^{2n-1}\cdot 9 + ... - 625\cdot 9^{2n-1} + 9^{2n})$$

$$\Rightarrow 5^{8n+4} + 3^{4n+2} = 634(625^{2n} - 625^{2n-1}\cdot 9 + ... - 625\cdot 9^{2n-1} + 9^{2n})$$

como se quería demostrar.

Se concluye que el número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804 para cualquier entero positivo n.

SOLUCIÓN 2: (brindada por Jorge Obando Toruño)

Como se vio en la solución anterior, basta con demostrar que $5^{8n+4} + 3^{4n+2}$ es múltiplo de 634. Procederemos por inducción. Para n = 0 se observa que la expresión dada es 634 y es verdadera la proposición. Luego, debemos demostrar que $5^{8n+12} + 3^{4n+6}$ es múltiplo de 634. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} 5^{8n+12} + 3^{4n+6} &= 5^{8n+12} + 3^{4n+6} + 3^4 \cdot 5^{8n+4} - 3^4 \cdot 5^{8n+4} \\ &= (3^{4n+6} + 3^4 \cdot 5^{8n+4}) + (5^{8n+12} - 3^4 \cdot 5^{8n+4}) \\ &= 3^4 (3^{4n+2} + 5^{8n+4}) + 5^{8n+4} (5^8 - 3^4) \\ &= 3^4 (3^{4n+2} + 5^{8n+4}) + 5^{8n+4} (5^4 + 3^2)(5^2 + 3)(5^2 - 3) \\ &= 81(3^{4n+2} + 5^{8n+8}) + 5^{8n+4} \cdot 634 \cdot 28 \cdot 22 \end{aligned}$$

y como ambos sumandos del miembro derecho son divisibles por 634 (el primero de ellos por hipótesis inductiva) entonces también lo es el miembro izquierdo. Finalmente, por el método de inducción $5^{8n+4} + 3^{4n+2}$ es múltiplo de 634 y se concluye que $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804.

4. Sea G el baricentro del triángulo ABC. Si se verifica que AC + GC = AB + GB demostrar que el triángulo es isósceles.
(Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional 1996)

SOLUCIÓN OFICIAL 1:

Teniendo en cuenta el teorema de la mediana, la relación del enunciado se escribe:

$$c-b=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}}-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}}\right),$$

multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada queda:

$$c-b=\frac{2}{3}\frac{\frac{3}{4}\left(c^2-b^2\right)}{m_c+m_b}\Leftrightarrow (c-b)\left(m_c+m_b-\frac{c+b}{2}\right)=0$$

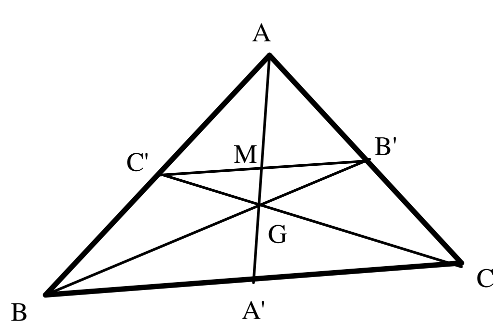
Probaremos que el segundo factor es positivo, de donde se deduce la conclusión.

Llamando B' y C' a los puntos medios de AC y AB respectivamente, en los triángulos CC'A y BB'A tenemos por la desigualdad triangular:

$$m_b+\frac{b}{2}>c;\;\; m_c+\frac{c}{2}>b$$

Sumando ambas desigualdades se obtiene el resultado.

SOLUCIÓN OFICIAL 2:



Llamando A', B', C' a los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente y dividiendo por dos la condición del enunciado podemos escribirla como:

$$\frac{C'A}{2}+\frac{C'G}{2}=\frac{B'A}{2}+\frac{B'G}{2},$$

es decir los puntos C' y B' están en una elipse de focos A y G.

Llamando M al punto medio de C'B' , M esta en la mediana AA' y no es el centro de la elipse (punto medio del segmento AG), por tanto C'B' ha de ser perpendicular a AA', y entonces AA' además de mediana es altura y el triángulo es isósceles.

5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida como sigue:

   a) $f(1) = 1$
   b) $f(2) = 5$
   c) $f(n + 1) = f(n) + 2f(n - 1)$

   Determine una fórmula, en términos de n, para f(n) y calcule f(1994).

(VI Olimpiada Costarricense de Matemática, 1994)

SOLUCIÓN 1: (brindada por Miguel Ángel Arias Vílchez)

Deduzcamos el criterio de f(n) y demostrémosla por inducción matemática.

Para lo anterior determinemos, por intuición, el comportamiento de f(n):

$$f(1) = 1 = 2^1 + (-1)^1.$$

$$f(2) = 5 = 2^2 + (-1)^2.$$

$$f(3) = f(2) + 2f(1) = 5 + 2 = 7 = 2^3 + (-1)^3.$$

$$f(4) = f(3) + 2f(2) = 7 + 10 = 17 = 2^4 + (-1)^4.$$

en general:

$$f(n) = 2^n + (-1)^n.$$

Ahora bien, está demostrado que para f(1) y f(2) el criterio deducido satisface las condiciones a) y b) de la hipótesis por lo que nuestra hipótesis inductiva será que

$$f(n) = 2^n + (-1)^n.$$

Para terminar la demostración por inducción debemos demostrar que

$$f(n + 1) = f(n) + 2f(n - 1)$$

en efecto,

$$f(n) + 2f(n - 1)$$

$$= [\ 2^n + (-1)^n\ ] + 2[\ 2^{n-1} + (-1)^{n-1}\ ]$$
$$= 2^n + (-1)^n + 2 \bullet 2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}$$
$$= 2^n + (-1)^n + 2^n + 2(-1)^{n-1}(-1)^{-1}$$
$$= 2^n + 2^n + (-1)^n - 2(-1)^n$$
$$= 2 \bullet 2^n - (-1)^n$$
$$= 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$$
$$= f(n+1)$$

De lo anterior se concluye que $f(n) = 2^n + (-1)^n$ y $f(1994) = 2^{1994} + 1$.

SOLUCIÓN 2: (brindada por José Virgilio Reyes Pérez)

Puede definirse un tipo particular de función numérica de la siguiente manera:

a, b, x_0, x_1 son números arbitrarios, hagamos $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$ y $f(n+1) = af(n) + bf(n-1)$ (1)

Lo anterior determina a $f(n)$ dependiendo solamente de a, b, x_0 y x_1. Tal relación recibe el nombre de fórmula por recurrencia o de repetición.

Por conveniencia escribamos (1) de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$$

Para obtener una relación más simple se escribe esta última ecuación en la forma:

$$x_{n+1} - kx_n = (a-k)(x_n - k_{n-1}) + (b + ak - k^2)x_n - 1.$$

Si k_1 y k_2 son las raíces de $b + ak - k^2 = 0$, entonces $k_1 + k_2 = a$, y se tiene

$$x_{n+1} - k_1x_n = k_2\,(x_n - k_1x_{n-1}),$$
$$x_{n+1} - k_2x_n = k_1\,(x_n - k_2x_{n-1}),$$

y de aquí

$$x_{n+1} - k_1x_n = k^n{}_2\,(x_1 - k_1x_0),$$
$$x_{n+1} - k_2x_n = k^n{}_1\,(x_1 - k_2x_0),$$

restando ambas ecuaciones se encuentra

$$(k_2 - k_1)x_n = (x_1 - k_1x_0)\, k^n{}_2 \; - \; (x_1 - k_2x_0)\, k^n{}_1.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x_n = [(x_1 - k_1x_0)\, k^n{}_2 \; - \; (x_1 - k_2x_0)\, k^n{}_1] \,/\, (k_2 - k_1), \;\; k_2 \neq k_1 \;\; (*)}$$

Así se tiene una fórmula para encontrar el valor de x_n directamente en términos de a, b, x_0 y x_1 sin tener que calcular los valores de x_2, x_3, x_4, …, x_{n-1}.

Ahora bien, pensemos qué sucede si $k_2 = k_1$. En ese caso podríamos mantener fijos k_1 y n y hacer que k_2 tienda hacia k_1. Después de algunos cálculos (se le invita a que los efectúe: utilice límites y la regla de L' Hôpital) esto nos lleva a

$$\mathbf{x_n = nx_1k_1{}^{n-1} \; - \; (n-1)x_0k^n{}_1 \,, \;\; k_2 = k_1 \; (**)}$$

Ahora bien, en nuestro ejercicio se tiene que $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ y $x_0 = f(0) = 2$ (puede hallarse mediante f(n + 1) = f(n) + 2f(n – 1) sustituyendo n = 1),
a = 1, b = 2 por lo que la ecuación a resolver es $2 + k - k^2 = 0$ cuyas soluciones son $k_1 = 2$ y $k_2 = -1$.

De donde obtenemos que $f(n) = 2^n + (-1)^n$ y $f(1994) = 2^{1994} + 1$.

SOLUCIÓN 3: (brindada por Jorge Obando Toruño)

A continuación se le facilitará al lector una pequeña pero útil teoría de funciones (o sucesiones) por recurrencia a fin de que cuente con una nueva herramienta para resolver ejercicios de nivel olímpico seguros de que esta teoría no la encontrará en el temario oficial del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica y que es una gran pena, por su facilidad y aplicabilidad que no se encuentre a su alcance.

Una sucesión a_1, a_2, a_3, …, a_n, …, es una sucesión recurrente si sus términos satisfacen la ecuación (desde cierto n y para los siguientes)

$$a_{n+k} = c_1a_{n+k-1} + c_2a_{n+k-2} + \ldots + c_ka_n \text{ con } n \geq k \geq 1$$

Los números c_1, c_2, …c_k son constantes. Cuando los primeros valores de una sucesión o función por recurrencia son conocidos a estos valores o condiciones se les llama condiciones iniciales.

A toda sucesión recurrente se le asocia la siguiente ecuación algebraica:

$$x^k = c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_k$$

a esta ecuación se le llama ecuación característica. Por ejemplo

a) si $f(n + 2) = f(n + 1) + 3f(n)$ entonces su ecuación característica será $x^2 = x + 3$.

b) si $x_{n-3} = x_{n+2} + x_n$ esta sucesión recurrente no se encuentra expresada en la forma $a_{n+k} = c_1a_{n+k-1} + c_2a_{n+k-2} + \ldots + c_ka_n$ con $n \geq k \geq 1$ por lo que primero debemos expresarla en tal forma, para ello bastará con sustituir n por n + 3 y así obtenemos $x_n = x_{n+5} + x_{n+3}$ por lo que, finalmente, su ecuación característica es $x^5 + x^3 - 1 = 0$.

Al tener una función por recurrencia y condiciones iniciales lo que se pretende con la teoría que se enunciará es determinar una expresión en términos de n, y no de los términos precedentes, que nos defina unívocamente la función.

El método para encontrar una expresión general para el n-ésimo término de la función por recurrencia es

1. Dada la ecuación recurrente $a_{n+k} = c_1a_{n+k-1} + c_2a_{n+k-2} + \ldots + c_ka_n$ encuentre la ecuación característica $x^k = c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_k$ asociada.
2. Resuelva la ecuación característica y llame $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a sus soluciones.
3. El término general para a_n, tiene la forma
   a) $a_n = A_1(\alpha_1)^n + A_2(\alpha_2)^n + \ldots + A_k(\alpha_k)^n$, donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son constantes arbitrarias. Esta expresión se da cuando los α_i son todos diferentes.
   b) Cuando se tenga una raíz de multiplicidad m entonces, en la expresión del punto a para el término general, en vez de multiplicar la raíz elevada a la n por una constante, debemos multiplicar por un polinomio de grado m – 1 de n, esto es, por $(A_1 + A_2n + A_3n^2 + \ldots + A_mn^{m-1})$.
4. Encuentre el valor de $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formando un sistema de ecuaciones con las condiciones iniciales.

De acuerdo con el enunciado del ejercicio que nos ocupa, se tiene que la función no está expresada en la forma general de una función recurrente, para que lo esté sustituimos n por n + 1 con lo que c) se transforma en

$$f(n + 2) = f(n + 1) + 2f(n)$$

Las condiciones iniciales son dadas en a) y b). La ecuación característica asociada es $x^2 = x + 2$ cuyas soluciones son $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = -1$. El término general para f(n) tiene la forma $f(n) = A_1(2)^n + A_2(-1)^n$ donde A_1 y A_2 son constantes a determinar. Con las condiciones iniciales, dadas en a) y b), sustituimos n = 1 y n = 2 en la expresión general y obtenemos el sistema

$$\begin{cases} f(1) = A_1(2)^1 + A_2(-1)^1 = 1 \\ f(2) = A_1(2)^2 + A_2(-1)^2 = 5 \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} 2A_1 - A_2 = 1 \\ 4A_1 + A_2 = 5 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se obtiene $A_1 = 1$ y $A_2 = 1$. Por lo tanto $f(n) = 2^n + (-1)^n$ y $f(1994) = 2^{1994} + 1$.

6. Considérese un triángulo ABC en el que la longitud de AB es 5 cm, las medianas por A y por B son perpendiculares entre sí y el área es 18 cm^2. Hallar las longitudes de los lados BC y AC.
(VI Olimpiada Costarricense de Matemática, 1994)

SOLUCIÓN 1: (brindada por José Virgilio Reyes Pérez)

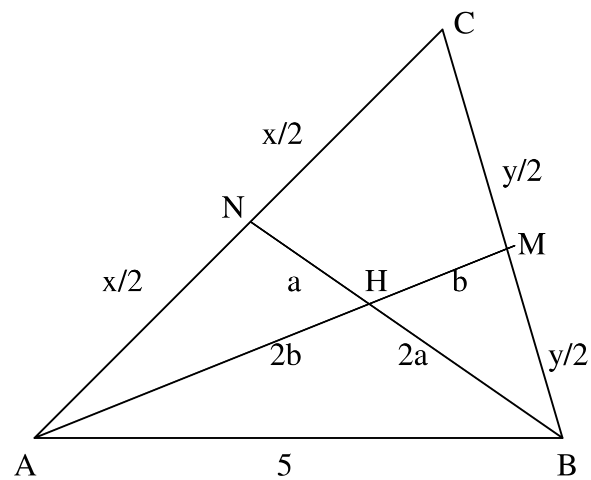
Sean x, y las longitudes de los lados buscados, por la fórmula de Herón tenemos que:

$$\frac{x+y+5}{2}\cdot\frac{x+y-5}{2}\cdot\frac{x-y+5}{2}\cdot\frac{-x+y+5}{2}=324$$

$$\Rightarrow \left[(x+y)^2-25\right]\left[25-(x-y)^2\right]=324\cdot 16$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + 2xy + y^2 - 25\right)\left(25 - x^2 + 2xy - y^2\right) = 5184 \quad (1)$$

Por otro lado, recordemos que el baricentro divide a las medianas en razón 2 : 1 a partir del vértice respectivo. Así, consideremos la figura adjunta



en donde los triángulos ABH, AHN y BHM son todos rectángulos en H con lo que se tiene

$$\begin{cases} 4a^2 + 4b^2 = 25 \\[2ex] a^2 + 4b^2 = \dfrac{x^2}{4} \\[2ex] 4a^2 + b^2 = \dfrac{y^2}{4} \end{cases}$$

de donde, sumando la segunda y tercera ecuación obtenemos:

$$5a^2 + 5b^2 = \frac{x^2 + y^2}{4} \Rightarrow 5\left(4a^2 + 4b^2\right) = x^2 + y^2 \Rightarrow 125 = x^2 + y^2 \quad (2)$$

que sustituyendo este resultado en (1) produce:

$$(100 + 2xy)(2xy - 100) = 5184$$

$$\Rightarrow 4(xy + 50)(xy - 50) = 5184$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 - 2500 = 1296$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 = 3796 \quad (3)$$

de (2) y (3) deducimos que existen dos números, x^2, y^2, que sumados dan 125 y multiplicados dan 3796, esto es, existen dos números que son raíces de una ecuación cuadrática de la forma $u^2 - 125u + 3796 = 0$ cuyas raíces son $x^2 = 73$ y $y^2 = 52$ (esto sin pérdida de generalidad) con lo que la medida de los lados son $\sqrt{73}$ cm y $2\sqrt{13}$ cm.

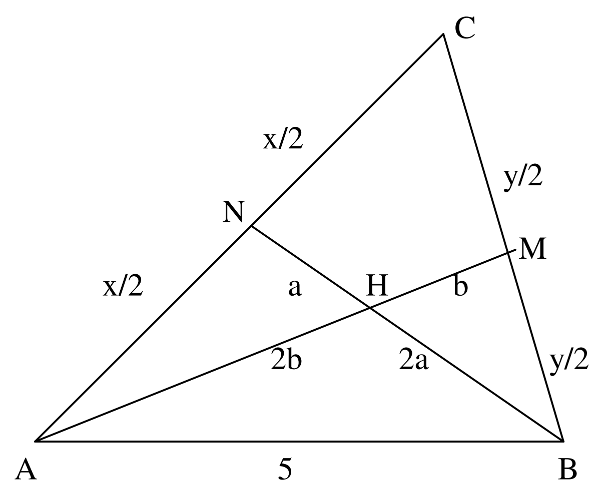
SOLUCIÓN 2: (brindada por Jorge Obando Toruño)

Consideremos la figura siguiente, en donde, por la semejanza de los triángulos CMN y ABC se tiene que

$$(CMN) = \frac{1}{4}(ABC) = \frac{9}{2} \text{ entonces}$$

$$(ABMN) = (ABC) - (CMN) = \frac{27}{2}$$

dado que los triángulos ABH, AHN, NHM y BHM son todos rectángulos en H se tiene que



$$(ABMN) = \frac{2a \cdot 2b}{2} + \frac{a \cdot 2b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{2a \cdot b}{2} = \frac{27}{2} \Rightarrow 4ab + 2ab + ab + 2ab = 27$$

$$9ab = 27 \Rightarrow ab = 3$$

por otro lado, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo AHB, se tiene

$$4a^2 + 4b^2 = 25 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab = \frac{25}{4} + 2ab \Rightarrow (a+b)^2 = \frac{49}{4} \\ \\ a^2 + b^2 - 2ab = \frac{25}{4} - 2ab \Rightarrow (a-b)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

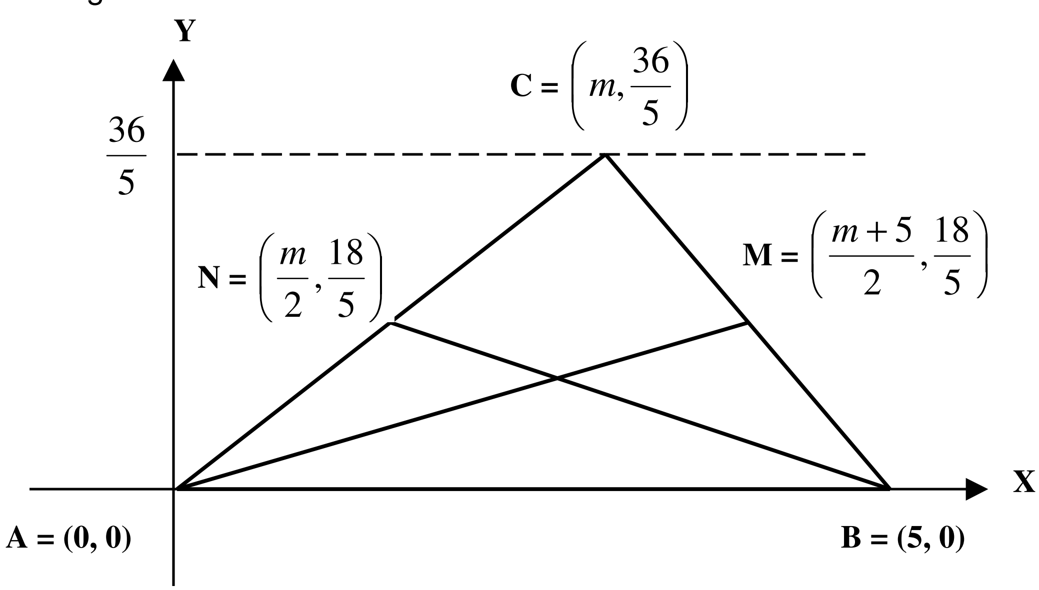
$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{7}{2} \\ \\ a-b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ \\ b=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

sustituyendo estos valores en el sistema que se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras en los triángulos BHM y AHN, esto es, en el sistema

$$\begin{cases} (2a)^2+b^2=\dfrac{y^2}{4} \\ \\ a^2+(2b)^2=\dfrac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{73}=BC \\ \\ x=2\sqrt{13}=AC \end{cases}$$

SOLUCIÓN 3: (brindada por Miguel Ángel Arias Vílchez)

Aplicaremos Geometría Analítica en esta solución, para ello consideremos la siguiente figura.



Las coordenadas de A y B se obtienen al colocar el vértice A en el origen de coordenadas y considerando que el segmento AB tiene longitud 5 cm. Con respecto a las coordenadas de C es claro que la coordenada en Y corresponde a la altura del triángulo y siendo el área del triángulo ABC igual a 18 cm^2 y su base de longitud 5 cm entonces dicha altura se obtiene fácilmente al resolver $\frac{5h}{2}=18$. Las coordenadas de M y N se obtienen de la definición de punto medio de un segmento. Ahora bien, como las medianas son perpendiculares entonces el producto de las pendientes de las rectas que las definen es igual a –1. La pendiente de la recta que define al segmento AM corresponde a $\frac{\frac{18}{5}}{\frac{m+5}{2}}=\frac{36}{5m+25}$ y la pendiente de la recta que define al segmento BN corresponde a $\frac{\frac{-18}{5}}{5-\frac{m}{2}}=\frac{-36}{50-5m}$ de donde se obtiene la ecuación

$$\frac{36}{5m+25}\cdot\frac{-36}{50-5m}=-1$$

que al resolver nos produce $m=\frac{2}{5}$ y $m=\frac{23}{5}$. Al calcular la distancia entre los puntos A y C tomando $m=\frac{2}{5}$ se obtiene:

$$AC=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{36}{5}\right)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}\text{ cm}$$

del mismo modo, para B y C tendremos:

$$BC=\sqrt{\left(\frac{-36}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}-5\right)^2}=\sqrt{73}\text{ cm}$$

en caso de que $m=\frac{23}{5}$ se obtienen las longitudes $AC=\sqrt{73}$ cm y $BC=2\sqrt{13}$ cm con lo que la medida de los lados son $\sqrt{73}$ cm y $2\sqrt{13}$ cm.

7. Los números reales α, β satisfacen las ecuaciones $\alpha3 - 3\alpha2 + 5\alpha - 17 = 0$, $\beta3 - 3\beta2 + 5\beta + 11 = 0$. Hallar $\alpha + \beta$.

(VI Olimpiada Irlandesa de Matemática, 1993)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$. Probaremos que $f(\alpha) + f(\beta) = 6$ lo que implica que $\alpha + \beta = 6$. En efecto, notemos que $f(x) = (x - 1)^3 + 2(x - 1) + 3$. Sustituyendo α y β en esta última igualdad obtenemos $f(\alpha) = (\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1) + 3$ y $f(\beta) = (\beta - 1)^3 + 2(\beta - 1) + 3$, respectivamente, al sumar ambas igualdades se obtiene:

$$f(\alpha) + f(\beta) = (\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1) + 3 + (\beta - 1)^3 + 2(\beta - 1) + 3 \quad (1)$$

pero se tiene que $f(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 17$ y $f(\beta) = \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = -11$ por lo que (1) equivale a $17 - 11 = (\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1) + 3 + (\beta - 1)^3 + 2(\beta - 1) + 3$ o bien

$$0 = (\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1) + (\beta - 1)^3 + 2(\beta - 1) = (\alpha - 1)^3 + (\beta - 1)^3 + 2(\alpha + \beta - 2)$$

$$\Rightarrow 0 = (\alpha + \beta - 2)[\, (\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)(\beta - 1) + (\beta - 1)^2 + 2\,]$$

como el segundo factor del miembro derecho es positivo entonces $\alpha + \beta - 2 = 0$ con lo cual $\alpha + \beta = 2$.

8. Sean a_0, a_1, ..., a_{n-1} números reales donde $n \geq 1$ y sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ tal que $|f(0)| = f(1)$ y cada raíz α de f es real y satisface $0 < \alpha < 1$.

Pruebe que el producto de las raíces es menor o igual que $\frac{1}{2^n}$.

(VI Olimpiada Irlandesa de Matemática, 1993)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Sea $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$ donde α_i denota la i-ésima raíz real de f para $i = 1, 2, \ldots, n$.

De $|f(0)| = f(1)$ se tiene que $\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i) = \prod_{i=1}^{n}\alpha_i$. Haciendo uso de la desigualdad de la media aritmética - media geométrica tenemos

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 = \prod_{i=1}^{n}\alpha_i(1-\alpha_i) \le \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i+1-\alpha_i}{2}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}} \le \frac{1}{2^n}.$$

NOTAS:

1. La expresión $\prod_{i=1}^{n} x_i$ denota al producto $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$, esto es, el símbolo Π se lee "productoria de" y abrevia la multiplicación tal como lo hace Σ con la suma.

2. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n términos positivos entonces la media aritmética (M.A) se define como $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ y la media geométrica (G.M) se define como $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$, la desigualdad entre la M.A y la M.G establece que M.A ≥ M.G con igualdad solamente si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

9. Si $x + y + z = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ determine el valor de $x^4 + y^4 + z^4$.
(Olimpiada Japonesa de Matemática, 1995. Olimpiada Costarricense de Matemática, 1995)

SOLUCIÓN OFCIAL 1:

Antes de presentar esta solución será conveniente darles a continuación una pequeña teoría sobre las ***Relaciones de Newton***:

Dados n números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sean S_k la suma de los productos de los a_i tomados k veces y $P_k = a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k$. Consideremos las siguientes generalizaciones

$$S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + \cdots + S_n x^n$$

$$= 1 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n)x^2 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n x^n$$

$$= (1 + a_1 x)(1 + a_2 x)\cdots(1 + a_n x)$$

y

$$P_0 - P_1 x + P_2 x^2 - \cdots$$

$$= \left(1 - a_1 x + a_1 x^2 - \cdots\right) + \left(1 - a_2 x + a_2 x^2 - \cdots\right) + \cdots \left(1 - a_n x + a_n x^2 - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{1 + a_1 x} + \frac{1}{1 + a_2 x} + \cdots + \frac{1}{1 + a_n x}$$

su producto es

$$\left(n - P_1 x + P_2 x^2 - \cdots\right)\left(1 + S_1 x + S_2 x^2 + \cdots\right)$$

$$= (1 + a_1 x)(1 + a_2 x)\cdots(1 + a_n x)\left(\frac{1}{1 + a_1 x} + \frac{1}{1 + a_2 x} + \cdots + \frac{1}{1 + a_n x}\right) \quad (1)$$

en donde $P_0 = n$ y $S_0 = 1$. Obtenemos que la expresión (1) es equivalente a

$$n + (n-1)S_1 x + (n-2)S_2 x^2 + \cdots + S_{n-1} x^{n-1}$$

e igualando los coeficientes obtenemos

$$nS_1 - P_1 = (n-1)S_1$$

$$nS_2 - S_1 P_1 + P_2 = (n-2)S_2$$

$$nS_3 - S_2 P_1 + S_1 P_2 - P_3 = (n-3)S_3$$

$$\cdots$$

$$nS_{n-1} - S_{n-2} P_1 + S_{n-3} P_2 - \cdots + (-1)^{n-1} P_{n-1} = S_{n-1}$$

o, equivalentemente

$$P_1 - S_1 = 0$$

$$P_2 - S_1 P_1 + 2S_2 = 0$$

$$P_3 - S_1P_2 + S_2P_1 - 3S_3 = 0$$

$$\cdots$$

$$P_{n-1} - S_1P_{n-2} + S_2P_{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)S_{n-1} = 0$$

Estas identidades son conocidas como las ***Relaciones de Newton***.

Volviendo a nuestro problema, utilizando las Relaciones de Newton se tiene

$$P_1 - S_1 = 1 - S_1 = 0$$

$$P_2 - S_1P_1 + 2S_2 = 2 - S_1 + 2S_2 = 0$$

$$P_3 - S_1P_2 + S_2P_1 - 3S_3 = 3 - 2S_1 + S_2 - 3S_3 = 0$$

con lo que $S_1 = 1,\ \ S_2 = \frac{-1}{2},\ \ S_3 = \frac{1}{6}$ y como no hay un cuarto número entonces $S_4 = 0.$ Así,

$$P_4 - S_1P_3 + S_2P_2 - S_3P_1 + 4S_4 = 0$$

$$\Rightarrow P_4 - 1\cdot 3 + \frac{-1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{6}\cdot 1 + 4\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow P_4 = 3 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$$

SOLUCIÓN 2: (brindada por Jorge Obando Toruño)

Notemos que, de la segunda ecuación, se tiene

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

$$\Rightarrow 1 = 2 + 2(xy + xz + yz)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = xy + xz + yz$$

también,

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz$$

$$\Rightarrow 1 = 3 + 3\cdot 1\cdot -\frac{1}{2} - 3xyz$$

$$\Rightarrow xyz = \frac{1}{6}$$

además,

$$(xy + xz + yz)^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2(x^2y\,z + xy^2z + xyz^2)$$

$$\Rightarrow (xy + xz + yz)^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2xyz(x + y + z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1$$

$$\Rightarrow x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = -\frac{1}{12}$$

finalmente,

$$(x + y + z)^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2)(xy + xz + yz) + 4(xy + xz + yz)^2$$

$$\Rightarrow 1 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4 \cdot 2 \cdot -\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2\,y^2 + y^2\,z^2 + x^2z^2)$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 = \frac{25}{6}$$

SOLUCIÓN 3: (brindada por José Virgilio Reyes Pérez)

Elevando al cuadrado la ecuación $x + y + z = 1$ se obtiene que:

$$-\frac{1}{2} = xy + xz + yz \quad (1)$$

además, $x + y = 1 - z$ (2) y $x^2 + y^2 = 2 - z^2$ (3). Por otro lado,

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3$$

$$\Rightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) + z^3 = 3$$

sustituyendo (2) y (3) en la ecuación anterior obtenemos

$$(1 - z)(2 - z^2 - xy) + z^3 = 3 \quad (4)$$

pero (1) es equivalente a $xy = -\frac{1}{2} - z(x + y) = -\frac{1}{2} - z(1 - z)$. Luego, (4) puede expresarse como

$$(1 - z)\left(2 - z^2 + \frac{1}{2} + z(1 - z)\right) + z^3 = 3$$

y, al efectuar las operaciones indicadas y reducir términos semejantes se obtiene $3z^3 - 3z^2 - \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} = 0$ esta ecuación es equivalente

$$3z^4 - 3z^3 - \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}z = 0$$

del mismo modo, se obtiene

$$3x^4 - 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$$

$$3y^4 - 3y^3 - \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}y = 0$$

sumando las tres ecuaciones

$$3(x^4 + y^4 + z^4) - 3(x^3 + y^3 + z^3) - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x + y + z) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^4 + y^4 + z^4) - 3 \cdot 3 - \frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^4 + y^4 + z^4) = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 = \frac{25}{6}$$

10. Los números naturales a y b verifican la condición $56a = 65b$.

Demuestre que $a + b$ no es primo.

(Círculo Matemáticos Rusos, primer nivel, 1999)

SOLUCIÓN: (brindada por Ileana Rodríguez Cortés[1])

Notemos que $a = \frac{65b}{56}$, pero como a es un número natural y (56, 65) = 1 entonces debe existir n natural tal que $b = 56n$ con lo que $a = 65n$, luego

$$a + b = 65n + 56n = 121n$$

con lo que es claro que $a + b$ es divisible por 121 y por tanto no es primo.

[1] Ileana Rodríguez Cortés obtuvo medalla de plata en la OLCOMA de 1989.

6. Olimpiadas alrededor del mundo.

Jorge Obando Toruño

José Virgilio Reyes Pérez

En esta columna, a partir de esta edición, se propondrán únicamente problemas que hayan sido parte de exámenes de competencias olímpicas, nacionales o internacionales, con esto pretendemos que otros tipos de competencias sean abordados en la columna *Problemas de Competencias no Olímpicas* (antes denominada problemas propuestos) de esta misma revista.

Es importante hacer notar que los problemas de la OLCOMA que se publican en esta revista corresponden a lo que hoy se considera el nivel C de estas competencias olímpicas y que se hará referencia a otro nivel cuando ello sea necesario.

1. Demuestre que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es divisible por 133.

(Olimpiada Costarricense de Matemática, 1993)

2. Determinar para cuáles números primos p se cumple que $2^p + p^2$ es primo.

(Olimpiada Nacional de Matemática. Chile, 1989)

3. Sean $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$ y p un número primo impar. Pruebe que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que p divide a f(n) si y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que p divide a $m^2 - 5$.

(Olimpiada Mexicana de Matemática, 1994)

4. Demuestre que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

(Olimpiada Costarricense de Matemática, 1995)

5. Si f es una función definida en los números enteros positivos que verifica:

   a) $f(n+1) = \dfrac{2f(n)+1}{2}$

   b) $f(1)$ = 2.

   Determine $f(n)$ en términos de n y calcule $f(1992)$.

(Olimpiada Costarricense de Matemática, 1992)

6. Halle todas las ternas de enteros (a, b, c) tales que:

$$a + b + c = 24$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 210$$

$$abc = 440$$

(I Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 1985)

7. Calcule la suma de todas las fracciones positivas irreducibles menores que uno cuyo denominador es 1994.

(Olimpiada Mexicana de Matemática, 1994)

8. En una fiesta hay 205 personas de cinco nacionalidades diferentes. En cada grupo de seis, al menos dos personas tienen la misma edad. Pruebe que hay al menos cinco personas del mismo país, de la misma edad y el mismo sexo.

(XXIX Olimpiada Española de Matemática, 1992)

9. En el triángulo ABC, M es el punto medio del lado AC, D es un punto sobre el lado BC tal que AD es bisectriz del ángulo BÂC y P es el punto de intersección de AD y BM. Sabiendo que el área del triángulo ABC es 100, AB = 10 y AC = 30, calcule el área del triángulo APB.

(XXV Olimpiada Brasileira de Matemática, 2003)

10. En el triángulo ABC, sean D, E, F los pies de las alturas trazadas desde A, B, C respectivamente y H su ortocentro. Pruebe que

$$\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$$

(Olimpiada Matemática Australiana, 1993)

7. Lógica y Matemática Recreativa.

Maynor Castro
Randall Godínez.
Arlene Martínez
Carlos Molina
Mauricio Ramírez
Melissa Ramírez
Carlos Rodríguez
Simón Sánchez
Erick Solano

En la columna de esta edición vamos a tratar una amplia variedad de problemas relacionados a una isla en la que ciertos habitantes llamados "caballeros" dicen siempre la verdad, y otros llamados "escuderos" siempre mienten. Supondremos, además, que todo habitante de la isla es o caballero o escudero.

1. Razona cuál sería la respuesta que se obtendría si se le preguntará a un habitante de la isla "¿Es usted caballero o escudero?"
2. Dos individuos, A y B, cada uno de los cuales es o caballero o escudero se encontraban en un jardín. Un extranjero pasó por allí y A dice: " uno de nosotros es al menos escudero ".

¿Qué son A y B?

3. Supóngase que A dice, " O yo soy un escudero o B es un caballero".

¿Qué son A y B?

4. Tenemos tres personas A, B y C, cada una de las cuales es o caballero o escudero. A y B dicen lo siguiente:

A: Todos nosotros somos escuderos.

B: Uno de nosotros, y sólo uno de nosotros es un caballero.

¿Qué son A, B y C?

5. Supóngase ahora que A y B dicen lo siguiente:

A: Todos nosotros somos escuderos.

B: Uno de nosotros, y sólo uno de nosotros es un escudero.

¿Puede determinarse lo que es B? ¿ Puede determinarse lo que es C?

6. Supóngase que A dice, “Yo soy escudero, pero B no lo es”

¿Qué son A, B y C?

7. Volvemos a tener tres habitantes, A, B y C, cada uno de las cuales es o caballero o escudero. Se dice que dos personas son del ***mismo tipo*** si son ambos caballeros o escuderos. A y B dicen lo siguiente:

A: B es un escudero.

B: A y C son del mismo tipo.

¿Qué es C?

8. Tres individuos, A, B y C cada uno de los cuales es o caballero o escudero se encontraban en un jardín. Un extranjero pasó por allí y le preguntó a A, “ ¿ Eres caballero o escudero ?”. A respondió tan confusamente, que el extranjero no pudo enterarse de lo que decía. Entonces el extranjero le preguntó a B, “¿Qué ha dicho A?”. Y B le respondió: “A ha dicho que es escudero” Pero en ese momento C dijo: “¡No creas a B, que está mintiendo!”.

¿Qué son B y C?

9. Tres individuos, A, B y C cada uno de los cuales es o caballero o escudero se encontraban en un jardín. Un extranjero pasó por allí y le preguntó a A, “ ¿Cuántos caballeros hay entre ustedes?”. A respondió tan confusamente, que el extranjero no pudo enterarse de lo que decía. Entonces el extranjero le preguntó a B, “¿Qué ha dicho A?”. Y B le respondió: “A ha dicho que hay un caballero entre nosotros ” Pero en ese momento C dijo: “¡No creas a B, que está mintiendo!”.

¿Qué son A, B y C?

10. Supóngase que A dice, “ O yo soy un escudero o en caso contrario dos más dos es igual a cinco“.

¿Qué concluirías?