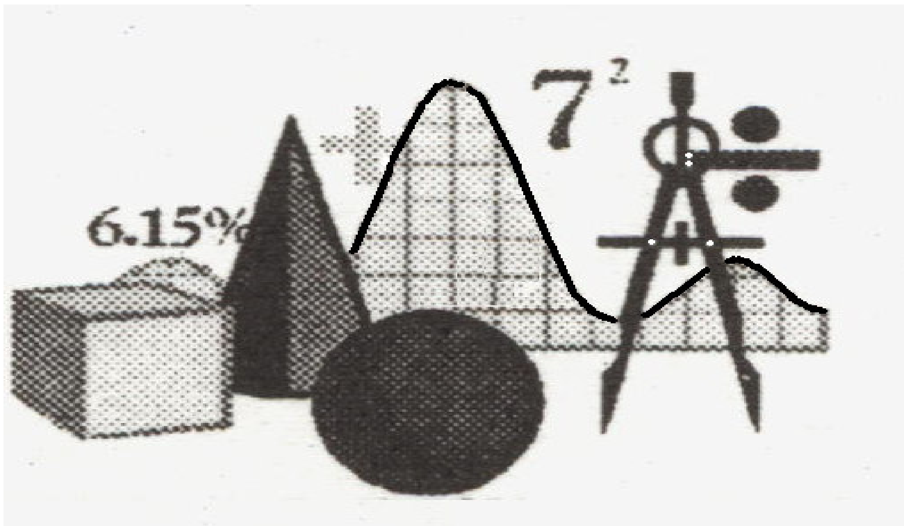


Sociedad Ramamsem

Problemas de Matemática para Competencias olímpicas

Elaborado por :

Miguel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

II TRIMESTRE DEL 2007

CONTENIDO

1. Presentación.

Esta publicación es realizada por la Sociedad RAMAMSEM y va dirigida a todas aquellas personas que deseen explorar una matemática diferente a la que se enseña en secundaria, y algo más !

En la sección **Problemas de Competencias no Olímpicas** los proponentes han seleccionado problemas que han sido evaluados en el concurso “American Invitational Mathematics Examination” cuyas siglas corresponden a AIME y con las cuales se identifican los problemas propuestos.

Queremos recordarles a todos nuestros lectores que pueden compartir este material con todos aquellos que lo requieran y que no tiene costo alguno. Les pedimos que si alguna otra persona lo recibe envíennos un e-mail para ampliar nuestra base de datos y poder tener un contacto más cercano con nuestros lectores.

Toda comunicación o información con respecto a los problemas propuestos o soluciones, pueden ser enviados a

ramamsem@latinmail.com o bien ramamsem@costarricense.cr

2. Solución a los anteriores Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

A continuación brindamos la solución de los 30 ejercicios propuestos en la columna **Problemas de Competencias no Olímpicas** de la edición anterior.

Les recordamos que la forma de resolver cada ejercicio no necesariamente es la única, así que invitamos al estimable lector a enviarnos sus soluciones a los mismos.

ÁLGEBRA.

1. Determine todas las soluciones reales de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{17+8x-2x^2}+\sqrt{4+12x-3x^2}=x^2-4x+13.$$

(CEOC, 1995)

SOLUCIÓN:

Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sqrt{17+8x-2x^2}+\sqrt{4+12x-3x^2}\\
&\quad= \sqrt{25-2(x-2)^2}+\sqrt{16-3(x-2)^2}\\
&\quad\le \sqrt{25}+\sqrt{16} = 9 \le 9+(x-2)^2\\
&\quad= x^2-4x+13
\end{aligned}$$

con igualdad si y solo si $x-2=0$, así, $x=2$.

2. (a) Resuelva: $\sqrt{x+20} - \sqrt{x+1} = 1.$

   (b) Resuelva: $\sqrt[3]{x+20} - \sqrt[3]{x+1=1.}$

(Canadian Mathematical Society Prize Exam, April 26, 1996)

SOLUCIÓN:

(a) Sean $A = \sqrt{x+20}$ y $B = \sqrt{x+1}$. Tenemos que $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) = A+B$ ya que $A - B = 1.$ Así $x + 20 - (x+1) = 19 = A + B.$ Ahora bien, $2A = 20,$ $A = 10$ y $x = 80.$

(b) Sean $A = \sqrt[3]{x+20}$ y $B = \sqrt[3]{x+1}$ así $A - B = 1.$ Multiplicando por $A^2 - 2AB + B^2$ tenemos que $A^3 - B^3 = A^2 + AB + B^2$ o bien $A^2 + AB + B^2 = 19.$ Como $A^2 - 2AB + B^2 = 1^2 = 1$ obtenemos $3AB = 19 - 1 = 18$ esto es $AB = 6.$ Así, $(x+20)(x+1) = A^3B^3 = 6^3 = 216.$ Esta última ecuación es equivalente a $x^2 + 21x - 196 = 0$ que al resolverla nos produce $x = -28$ o bien $x = 7.$

3. Determine las cuatro raíces de la ecuación: $x^4 + 16x - 12 = 0.$

(Another Five Klamkin Quickies, Octubre 21, 1996)

SOLUCIÓN:

Factorizando tenemos

$$x^4 + 16x - 12 = (x^2+2)^2 - 4(x-2)^2 = (x^2+2x-2)(x^2-2x+6) = 0,$$

así, las cuatro raíces de la ecuación son $-1 \pm \sqrt{3}$ y $1 \pm i\sqrt{5}.$

4. ¿Cuántos pares de enteros positivos satisfacen la ecuación

$$\frac{x}{19} + \frac{y}{95} = 1?$$

(The Twelfth W.J. Blundon Contest, Febrero 22, 1995)

SOLUCIÓN:

Notemos que 95 = 19 $\times$ 5. Para x = 1, 2, …,18 tenemos

$$\frac{y}{95} = 1 - \frac{x}{19} = \frac{19-x}{19} = \frac{95-5x}{95},$$

de donde, se obtienen 18 pares de enteros positivos $(x,\ y)$.

5. Determine todas las soluciones $(x,\ y)$ para el sistema de ecuaciones:

$$x + y + \frac{x}{y} = 19$$

$$\frac{x(x+y)}{y} = 60.$$

(The Twelfth W.J. Blundon Contest, Febrero 22, 1995)

SOLUCIÓN:

De la segunda ecuación obtenemos

$$\frac{x}{y} = \frac{60}{x+y}$$

así, se tiene que

$$x + y + \frac{60}{x+y} = 19, \qquad (x+y)^2 - 19(x+y) + 60 = 0$$

de donde

$$x + y = 4 \qquad x + y = 15.$$

Si $x + y = 4,\ \frac{x}{y} = 15,$ tenemos que $x = 15y$ y $16y = 4,$ así $y = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ y $x = \frac{15}{4}.$

Si $x + y = 15,\ \frac{x}{y} = 4,$ tenemos que $x = 4y$ y $5y = 15,$ así $y = \frac{15}{5} = 3$ y $x = 12.$

Finalmente, las soluciones $(x,\ y)$ son $\left(\frac{15}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $(12,\ 3).$

6. Determine todas las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN 1:

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación y simplificando se obtiene

$$-x = 4x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}. \qquad (1)$$

Claramente $x = 0$ no es una solución así que (1) puede expresarse como

$$-1 = 4(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}. \qquad (2)$$

Sea $y=\sqrt{1-x^2}$ entonces (2) puede expresarse como

$$\begin{aligned} 8y^3-4y-1 &= 0 \\ (2y+1)(4y^2-2y-1) &= 0. \end{aligned}$$

desde que y es positiva entonces

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

con lo que

$$x = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Ahora bien, verificando estos valores en la ecuación original se concluye que el único valor que es solución corresponde a

$$x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

SOLUCIÓN 2:

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación y simplificando se obtiene

$$4(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}=1.$$

Como $-1 \le x \le 1,$ podemos hacer el cambio de variable $x = sen\ \theta,$ donde $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$

Tenemos entonces que la ecuación obtenida se transforma en $4\left(1-2\,sen^2\ \theta\right)\sqrt{1-sen^2\ \theta}=1$

o equivalentemente, $4\left(2\cos^2\ \theta-1\right)\cos\ \theta=1.$

Ahora, la ecuación cúbica $8\cos^3\ \theta-4\cos\ \theta-1=0$ puede rescribirse como

$$(2\cos\theta+1)(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)=0.$$

Desde que $\cos\ \theta \ge 0,$ tenemos que

$$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Así, se tiene que $sen\ \theta = \pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$ Solamente la solución positiva satisface la ecuación con lo que se tiene

$$x = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

7. Suponga que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si, para todo $x \in [-1, 1]$, $\left|ax^2 + bx + c\right| \leq 1$, pruebe que

$$|cx^2 + bx + a| \leq 2.$$

(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $g(x) = cx^2 + bx + a$. Entonces, por la hipótesis del enunciado se tiene que

$$|a + b + c| = |f(1)| \leq 1, \ |a - b + c| = |f(-1)| < 1 \quad |f(0)| \leq 1.$$

con lo que

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \left|c(x^2 - 1) + (a + b + c)\frac{1 + x}{2} + (a - b + c)\frac{1 - x}{2}\right| \\
&\leq |c||x^2 - 1| + |a + b + c|\frac{|1 + x|}{2} + |a - b + c|\frac{|1 - x|}{2} \\
&\leq |x^2 - 1| + \frac{|1 + x|}{2} + \frac{|1 - x|}{2} \\
&= 1 - x^2 + \frac{1 + x}{2} + \frac{1 - x}{2} \\
&= 2 - x^2 \leq 2
\end{aligned}$$

para todo $x \in [-1, 1]$.

8. Determine todos los enteros que satisfacen la siguiente ecuación:

$$2^x \cdot (4 - x) = 2x + 4.$$

(Mathematical Team Contest, Baltic Way, Vilnius, November 5 – 8, 1992)

SOLUCIÓN:

Despejando se tiene

$$2^x = \frac{2(x + 2)}{4 - x} > 0,$$

con lo que

$$-2 < x < 4.$$

y, al efectuar unos cálculos tenemos

$$x = -1 \qquad \frac{1}{2} \neq \frac{2(-1)+4}{4-(-1)} = \frac{2}{5}$$

$$x = 0 \qquad 1 = \frac{2(0+2)}{4-0}$$

$$x = 1 \qquad 2 = \frac{2(1+2)}{4-1}$$

$$x = 2 \qquad 4 = \frac{2(2+2)}{4-2}$$

$$x = 3 \qquad 8 \neq \frac{2(3+2)}{4-3}$$

con lo cual las soluciones son 0, 1 y 2.

9. Determine todas las soluciones enteras de la ecuación

$$2(x+y) + xy = x^2 + y^2,$$

con $x > 0,\ y > 0.$

(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

Sea $y = r\,x$ con r racional. La ecuación dada se transforma en una ecuación cuadrática en r:

$$r^2x^2 - r(x^2+2x) + (x^2-2x) = 0$$

en donde se obtiene

$$r = \left(x + 2 \pm \sqrt{-3x^2+12x+4}\right)/2x.$$

El discriminate puede escribirse como $16 - 3(x-2)^2$ y este debe ser el cuadrado de un número entero. Desde que x es un entero positivo las únicas soluciones son $(x,\ r) = (4,\ 1), \left(4,\ \frac{1}{2}\right), (2,\ 2).$ Estas producen las soluciones $(x,\ y) = (4,\ 4), (4,\ 2), (2,\ 4).$

10. Suponga que $a \neq 0$ y $c \neq 0,$ y que $ax^3 + bx + c$ tiene un factor de la forma $x^2 + px + 1.$

Pruebe que $a^2 - c^2 = ab.$

(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

Las condiciones dadas en el enunciado muestran que $x = 0$ no es una solución.

Por otro lado, el otro factor debe ser lineal y, examinando los coeficientes, debe ser de la forma $ax + c.$ Entonces

$$ax^3+bx+c = (x^2+px+1)(ax+c) = ax^3+(c+ap)x^2+(a+cp)x+c.$$

Por identidad polinomial, comparando los coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} c + ap &= 0, \\ a + cp &= b. \end{aligned}$$

por lo que

$$p = -\tfrac{c}{a},$$

así tenemos que

$$a - \tfrac{c^2}{a} = b,$$

y, finalmente

$$a^2 - c^2 = ab.$$

GEOMETRÍA.

1. La suma de los ángulos de un polígono de n lados es menor que n^2. Determine el menor valor de n que satisface dicha condición.
(Alberta High School Mathematics Competition, Noviembre 21, 1995)

SOLUCIÓN:

La suma de los ángulos es exactamente $(n-2)180°$. De donde,

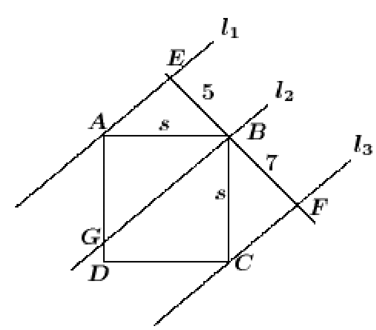
$$180 < \frac{n^2}{n-2} = n + 2 + \frac{4}{n-2} < n + 3,$$

con lo que se obtiene $n > 177,$ por tanto el menor valor de n es 178.

2. $ABCD$ es un cuadrado. Tres segmentos paralelos l_1, l_2, l_3 pasan por los vértices A, B, C respectivamente. Las distancias entre l_1 y l_2 es 5 y la distancia entre l_2 y l_3 es 7. Determine le área de $ABCD$.
(The Eleventh W.J. Blundon Contest, Febrero 23, 1994)

SOLUCIÓN:

Consideremos la figura siguiente



Tracemos el segmento perpendicular a l_2 que pasa por B e interseca a l_1 en E y a l_3 en F respectivamente. Sea G el punto de intersección de l_2 y AD entonces, $\angle BAE = \angle CBF$ y

$\angle AEB = 90^{\circ} = \angle BFC$ así los triángulos BAE y BCF son semejantes. Si el lado del cuadrado es s se tiene que

$$\frac{s}{\sqrt{s^2 - 5^2}} = \frac{s}{7}$$

así que, finalmente,

$$s^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74.$$

3. La suma de las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo es 18. La suma de los cuadrados de esas longitudes es 128. Determine el área de ese triángulo.
(The Eleventh W.J. Blundon Contest, Febrero 23, 1994)

SOLUCIÓN:

Sea a, b los catetos de dicho triángulo y c su hipotenusa entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a + b + c = 18$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 128.$$

Así, sustituyendo la primera ecuación en la tercera se obtiene

$$2c^2 = 128$$
$$c^2 = 64$$
$$c = 8.$$

Por otro lado,

$$a + b = 10,\ a^2 + b^2 = 64,$$

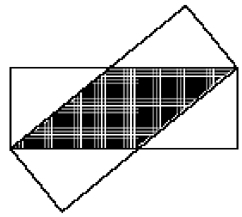
con lo que

$$\begin{aligned} 2ab &= (a+b)^2 - (a^2 + b^2) \\ &= 100 - 64 = 36 \end{aligned}$$

de donde, el área buscada corresponde a

$$\tfrac{1}{2}ab = \tfrac{2ab}{4} = \tfrac{36}{4} = 9.$$

4. Dos rectángulos congruentes con medidas 3 cm $\times$ 7 cm son colocados como indica la figura.

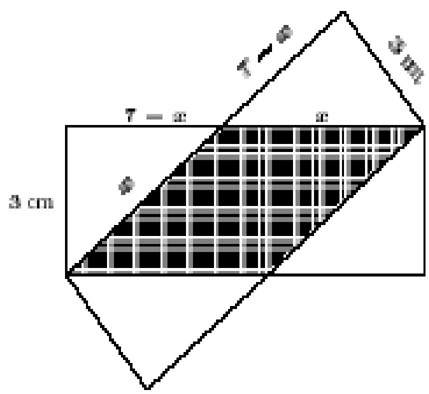


Determine el área común a ambos.

(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 2000)

SOLUCIÓN:

De acuerdo con los datos de la siguiente figura:

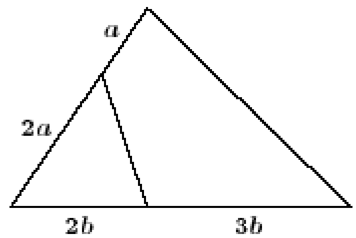


aplicando el teorema de Pitágoras se tiene

$$\begin{aligned} x^2 &= (7-x)^2 + 3^2 = 49 - 14x + x^2 + 9\,, \\ 14x &= 58 \quad \text{or} \quad x = \frac{29}{7}\,. \end{aligned}$$

así, el área buscada corresponde a $3x = \dfrac{87}{7}\, cm^2$.

5. El área del menor triángulo en la figura es 8 unidades cuadradas. Determine el área del triángulo mayor.



(Junior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda final, 1998)

SOLUCIÓN 1:

La longitud de la base del triángulo mayor es $5b$, mientras que la longitud de la base del triángulo menor es $2b$. Lo anterior nos provee la razón de sus bases en $\frac{5}{2}$. Similarmente, la razón de las correspondientes alturas es $H : h = 3a : 2a = \frac{3}{2}$. De donde, el área del triángulo mayor es $\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)(8) = 30$.

SOLUCIÓN 2:

Sea α el ángulo comprendido entre los lados de longitud $2a$ y $2b$ del triángulo menor (lo será también de los lados de longitud $3a$ y $5b$ del triángulo mayor) con lo que, el área del triángulo menor puede expresarse de la forma $\frac{1}{2}(2a)(2b)\,sen\,\alpha = 8$, mientras que el área buscada es $\frac{1}{2}(3a)(5b)\,sen\,\alpha = \frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}(2a)(2b)\,sen\,\alpha = \frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times 8 = 30$.

6. ABCD es un cuadrado cuyo lado tiene longitud s. Un círculo, centrado en A y radio r, es trazado de modo que el arco de este círculo que se localiza en el interior del cuadrado divide al cuadrado en dos regiones con igual área. Exprese r en términos de s.
(Saskatchewan Senior Mathematics Contest, Febrero 22, 1995)

SOLUCIÓN:

El área del cuadrado es s^2. El área del círculo es πr^2. Un cuarto de esta área se encuentra en el interior del cuadrado. Esta área es $\frac{\pi r^2}{4}$. Entonces, tenemos que

$$\frac{\pi r^2}{4} = \frac{s^2}{2}$$

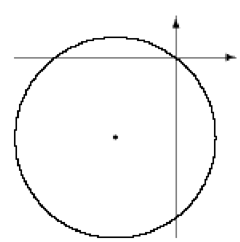
$$r^2 = \frac{2s^2}{\pi}$$

con lo que, finalmente

$$r = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, s.$$

7. Tres círculos pasan por el origen de coordenadas. El centro del primer círculo está en el primer cuadrante, el centro del segundo círculo está en el segundo cuadrante y el centro del tercer círculo está en el tercer cuadrante. Si P es cualquier punto que está en el interior de los tres círculos, pruebe que P está en el segundo cuadrante.
(The Manitoba Mathematical Contest, para estudiantes de grado12, Febrero 22, 1995)

SOLUCIÓN:
La clave está en considerar el tercer círculo.



Si su centro está en el tercer cuadrante y éste (el círculo) pasa por el origen entonces el único punto en común con el primer cuadrante es el origen mismo, así ningún punto en el interior del tercer círculo puede estar en el interior del primer cuadrante. Similarmente ningún punto en el interior del primer círculo puede estar en el tercer cuadrante y ningún punto del segundo círculo puede estar en el cuarto cuadrante. De lo anterior, el resultado es inmediato.

8. Suponga que a, b, c son las longitudes de los tres lados de un triángulo con semiperímetro s y área Δ. Pruebe que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{s}{\Delta}.$$

(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

Sea C el ángulo opuesto al lado c del triángulo. Como $\Delta=\frac{1}{2}ab\,sen\,C\leq\frac{1}{2}ab,$ tenemos que $\frac{1}{a}\leq\frac{b}{2\Delta}$. Notemos que la igualdad se da únicamente si el ángulo opuesto a c es un ángulo recto. Similarmente, $\frac{1}{b}\leq\frac{c}{2\Delta}$ y $\frac{1}{c}\leq\frac{a}{2\Delta}$. Debe ser claro que las tres igualdades no se pueden dar de manera simultánea por lo que, sumando las tres desigualdades tenemos

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{b+c+a}{2\Delta}=\frac{s}{\Delta}.$$

9. El área total de un cilindro circular recto es numéricamente igual al doble de su volumen. Determine las medidas del radio y la altura del cilindro sabiendo que ambas son enteras.
(Memorial University Undergraduate Mathematics Competition, Septiembre 25, 1997)

SOLUCIÓN:

Sea r el radio y h la altura del cilindro, donde r y h son ambos enteros.

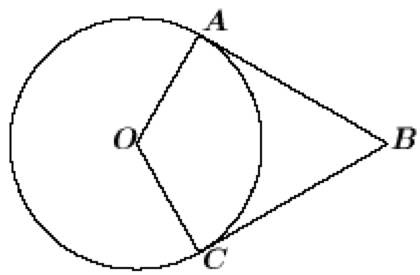
De acuerdo con el enunciado tenemos

$$2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r^2h.$$

de donde se sigue que $h+r=rh.$

Por otro lado, $(r-1)(h-1)=rh-r-h+1=0+1=1.$ Así, $r-1=1$ y $h-1=1$ (ya que ambos son enteros positivos), con lo que $r=2$ y $h=2.$

10. El triángulo ABC es equilátero con dos lados tangentes al círculo de centro O y radio $\sqrt{3}$. Determine el área del cuadrilátero $AOCB$.



(British Columbia Colleges Junior High School Mathematics Contest, Final Round 1997, Part A)

SOLUCIÓN:

Primero unamos los puntos B y O. Sabemos que una tangente a un círculo es perpendicular al radio del mismo en el punto de tangencia, de aquí que los dos triángulos BOA y BOC que se forman son triángulos rectángulos cada uno de los cuales es un triángulo 30° – 60° – 90°, con lo cual se tiene que la medida del lado BO es el doble de la medida del lado AO. Utilizando el teorema de Pitágoras tenemos

$$BA^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 12 - 3 = 9.$$

Así, $BA = BC = 3$. El área del triángulo BOA es $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3$. Como esta área es la mitad del área que buscamos entonces $AOCB = 3\sqrt{3}$.

TEORÍA DE NÚMEROS.

1. Determine todos los a, b tales que $25 \cdot a^b = 25ab$. (Aquí $25ab$ representa los dígitos de $25 \cdot a^b$, no un producto.)
(CEOC, 1992)

SOLUCIÓN:

Escribiendo el la igualdad propuesta en la forma

$$a^b = \frac{2500 + ab}{32} = 78{,}125 + \frac{ab}{32},$$

y teniendo en cuenta que ab puede ser como mucho 98, llegamos a

$$78 < a^b \leq 78{,}125 + \tfrac{98}{32} = 78{,}125 + 3{,}0625 = 81{,}1875.$$

Es decir, a^b sólo puede ser 79, 80 u 81. Sólo 81 es una potencia de un número entero. Además, lo es de dos formas, 92 y 34. La solución $a = 3$; $b = 4$ no es válida pues el valor de ab es único y sólo coincide con la solución $a = 9$; $b = 2$.

2. Un hombre compró doce piezas de fruta (manzanas y naranjas)por 99 centavos. Si una manzana cuesta 3 céntimos más que una naranja, y compró más manzanas que naranjas, ¿cuántas de cada compró?
(CEOC, 1992)

SOLUCIÓN:

Llamamos x, y al número de manzanas y peras, respectivamente, y p al precio de una naranja. Entonces

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ (p+3)x + py = 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + p(x+y) = 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 3x + 12p = 99 \\ x + 3p = 33 \\ x = 33 - 3p \end{array}.$$

Sustituyendo, $y = 12 - x = 12 - (33 - 4p) = 4p - 21$. Como compró más manzanas que naranjas, $33 - 4p > 4p - 21 \Rightarrow 54 > 8p \Rightarrow p \leq 6$. Por otro lado, x e y deben ser positivos, por lo que $4p - 21 \leq 0 \Rightarrow p \geq 6$. Sólo puede ser $p = 6$, que da $x = 9$ manzanas e $y = 3$ naranjas.

3. En 1732 Euler escribió: “He obtenido resultados [correctos] a partir de un teorema elegante, de cuya veracidad estoy seguro, aunque no tengo demostración: $a^n - b^n$ es divisible por el primo $n + 1$ si ni a y b lo son”.

(CEOC, 1992)

SOLUCIÓN:

Basta tener en cuenta que si $n + 1$ no divide ni a a ni a b, entonces, por el teorema de Fermat, tendremos que $a^n \equiv 1$ (mód $(n + 1)$) y $b^n \equiv 1$ (mód $(n + 1)$), de donde $a^n - b^n \equiv 0$ (mód $(n + 1)$) por lo que $a^n - b^n$ es divisible por $n + 1$.

4. El número 3774 es divisible por 37, 34 y 74 pero no por 77. Determine todos los números de cuatro dígitos abcd tales que sean divisibles por los números de dos dígitos ab, ac, ad, bd y cd pero que no sean divisibles por bc.

(CEOC, 1995)

SOLUCIÓN:

Las dos posibles soluciones son 1995 y 2184. Veamos, sea N = abcd = 100 (ab) + cd divisible por ab entonces, cd debe ser divisible por ab esto es cd = k(ab) donde k < 10 es un entero positivo. Desde que N es divisible por cd, también lo debe ser 100 (ab). Se sigue que k es divisor de 100. En tal caso, k solo puede ser uno de los números 1, 2, 4 y 5. Ahora, efectuando unos pequeños cálculos aritméticos, se obtiene que solamente 1995, 2184 y 3774 satisfacen las condiciones indicadas.

5. Si N es impar, ¿cuántas soluciones tiene $x^2 - y^2 = N$?

(CEOC, 1992)

SOLUCIÓN:

Teniendo en cuenta que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, para cada descomposición $N = m \cdot n$, estudiamos el sistema

$$\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}.$$

Al ser N impar, también lo serian m y n, y el sistema tendrá una única solución entera, de la forma

$$x = \tfrac{1}{2}(m + n),\ y = \tfrac{1}{2}(m - n).$$

Más aún, suponiendo que

$$(\frac{1}{2}(m_1 + n_1), \frac{1}{2}(m_1 - n_1)) = (\frac{1}{2}(m_2 + n_2), \frac{1}{2}(m_2 - n_2)),$$

fácilmente llegamos a $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$, es decir, cada sistema produce soluciones diferentes.

¿Cuantas descomposiciones $N = m \cdot n$ podemos hacer? Si sólo contamos los m y n positivos, habrá la mitad de $d(N)$, pero si contamos las posibilidades negativas, el resultado es $2 \cdot d(N)$.

NOTA: La expresión $d(N)$ se refiere a la cantidad de divisores positivos del número N.

FUNCIONES O SUCESIONES.

1. Determine todas las sucesiones $p_1 < p_2 < \cdots p_n$ de números primos diferentes tales que

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_n}\right)$$

es un entero.
(CEOC, 1995)

SOLUCIÓN:
Si el producto que se considera es un entero, entonces $p_n \mid (p_i + 1)$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Desde que $p_i + 1 \le p_n$, se deduce que $p_n = p_i + 1$, lo que a su vez implica que $p_i = 2$ y $p_n = 3$. Así, $n = 2,\ p_1 = 2,\ p_2 = 3$. Esto es, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) = 2.$

2. Considere la función $f(x) = \dfrac{cx}{2x+3},\ x \ne -\dfrac{3}{2}$. Determine todos los valores de c para los cuales $f(f(x)) = x$.
(The Eleventh W.J. Blundon Contest, Febrero 23, 1994)

SOLUCIÓN:

$$f(f(x)) = \frac{c\left(\frac{cx}{2x+3}\right)}{2\left(\frac{cx}{2x+3}\right)+3}$$

y

$$f(x) \ne -3/2, \text{ i.e. } cx/(2x+3) \ne -3/2,\ x \ne -9/(6+2c).$$

para estos valores excluidos se tiene que $f(f(x)) = x$ nos produce

$$\frac{c\left(\frac{cx}{2x+3}\right)}{2\left(\frac{cx}{2x+3}\right)+3} = x$$

así,

$$c^2x = x(2cx + 3(2x+3))$$
$$c^2x = 2cx^2 + 6x^2 + 9x$$

por identidad polinomial se tiene que $c^2 = 9$ y $2c = 6$, con lo que $c = 3$.

3. Sea $\{a_n\}$ una sucesión definida de la siguiente manera

$$a_{n+1} + a_{n-1} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right) a_n, \qquad n \geq 1.$$

pruebe que si $\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \geq 2,$ entonces $\left|\frac{a_n}{a_1}\right| \geq n.$

(CEOC, 1996)

SOLUCIÓN:

Por la desigualdad triangular tenemos que

$$|a_{n+1}| + |a_{n-1}| \geq |a_{n+1} + a_{n-1}| = \left|\frac{a_2}{a_1}\, a_n\right| = \left|\frac{a_2}{a_1}\right| \; |a_n| \geq 2|a_n|$$

Por otro lado, tenemos

$$|a_{n+1}| - |a_n| \geq |a_n| - |a_{n-1}|,$$

y por consiguiente

$$|a_n| - |a_{n-1}| \geq |a_{n-1}| - |a_{n-2}| \geq \cdots \geq |a_2| - |a_1| \geq |a_1|$$

así, tenemos que

$$|a_n| - |a_1| = \sum_{k=2}^{n} (|a_k| - |a_{k-1}|) \geq (n-1)|a_1|$$

de donde se sigue que

$$|a_n| \geq n|a_1|,$$

o equivalentemente

$$\left|\frac{a_n}{a_1}\right| \geq n.$$

4. Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq x$ y $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todos los números reales x y y.

(CEOC, 1998)

SOLUCIÓN:

Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &\leq x\,, & (1)\\ f(x+y) &\leq f(x)+f(y)\,. & (2) \end{aligned}$$

Sean $x = y = 0$ en (2). Obtenemos $f(0) \leq 2f(0)$ lo cual implica que $0 \leq f(0)$. Pero para $x = 0$ en (1), tenemos que $f(0) \leq 0$ así que $f(0) = 0$.

Ahora, tomemos $y = -x$ en (2) para obtener $f(0) \leq f(x) + f(-x)$ para todo x real. Lo anterior es equivalente a $-f(x) \leq f(-x)$. Pero $f(-x) \leq -x$ por (1) así que $-f(x) \leq -x$ lo que implica que $f(x) \geq x$ para todo x real. Al combinar este último resultado con (1) se concluye que $f(x) = x$ para todo x real. Ahora, se puede verificar fácilmente que esta función satisface las dos condiciones del enunciado.

5. Si $f(x)$ es un polinomio tal que $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ entonces, determine $f(x^2 - 1)$.

(Taller de preparación # 1 para grado 11, Universidad de Antioquia, Colombia, 2005)

SOLUCIÓN:

Sustituyamos x por $\sqrt{x-1}$ en $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ así obtendremos:

$$f(x) = (x-1)^2 + 5(x-1) + 3 \quad (1)$$

Ahora bien, sustituyamos en (2) la x por $x^2 - 1$ y se tendrá:

$$f(x^2 - 1) = (x^2 - 1 - 1)^2 + 5(x^2 - 1 - 1) + 3$$

es decir

$$f(x^2 - 1) = (x^2 - 2)^2 + 5(x^2 - 2) + 3$$

de donde

$$f(x^2 - 1) = x^4 - 4x^2 + 4 + 5x^2 - 10 + 3 = x^4 + x^2 - 3$$

Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna consistirá en 30 ejercicios propuestos que se separarán por categorías (Álgebra, Geometría, Teoría de Números y Funciones o Sucesiones) y de menor a mayor nivel de dificultad. Es importante destacar que el ***nivel de dificultad*** en que se ordenarán los ejercicios de cada categoría es valorado por nosotros (los editores) de acuerdo a criterios establecidos pero ello no significa que esta valoración pueda ser diferente para el estimable lector.

Por otro lado, la solución de los mismos se presentará hasta la próxima edición con la finalidad de que nuestros lectores participen activamente enviándonos soluciones y / o comentarios que puedan enriquecer la discusión de cada ejercicio. Sin embargo, de no darse esa participación en algunos ejercicios, se publicará, al menos, una solución oficial brindada por los encargados de esta sección.

ÁLGEBRA.

1. El producto N de tres enteros positivos es seis veces la suma de ellos. Uno de los enteros es la suma de los otros dos. Determine la suma de todos los posibles valores de N.
(AIME, 2003)

2. Las raíces de $x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$ son $a, b, c, d.$ Determine $p(a) + p(b) + p(c) + p(d),$ donde $p(x) = x^6 - x^5 - x^5 - x^2 - x.$
(AIME, 2003)

3. Las soluciones del sistema $\begin{cases} \log_{225} x + \log_{64} y = 4 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1 \end{cases}$ son (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

   Determine $\log_{30}(x_1 y_1 x_2 y_2)$.

(AIME, 2002)

4. m, n son primos relativos. Los coeficientes de x^2 y x^3 en la expansión de $(mx+n)^{2000}$ son iguales. Determine $m+n$.

(AIME, 2000)

5. x, y, z son números reales positivos tales que $xyz = 1,\ x + \frac{1}{z} = 5,\ y + \frac{1}{x} = 29.$ Determine $z + \frac{1}{y}.$

(AIME, 2000)

6. Las raíces de $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$ son a, b, c. La ecuación con raíces $a+b, b+c, c+a$ es $x^3 + rx^2 + sx + t = 0.$ Determine t.

(AIME, 1996)

7. m, n son enteros positivos tales que $mn + m + n = 71,\ m^2 n + mn^2 = 880,$ determine $m^2 + n^2.$

(AIME, 1991)

8. Determine la solución positiva de $\dfrac{1}{x^2 - 10x - 45} + \dfrac{1}{x^2 - 10x - 29} = \dfrac{1}{x^2 - 10x - 69}.$

(AIME, 1990)

9. Los números reales a, b, x, y satisfacen $ax + by = 3, ax^2 + by^2 = 7, ax^3 + by^3 = 16, ax^4 + by^4 = 42.$

   Determine $ax^5 + by^5.$

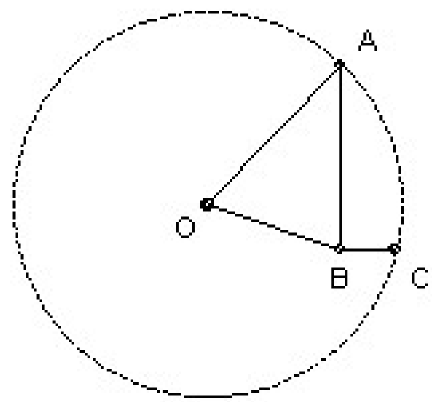
(AIME, 1990)

10. Determine la suma de las raíces de $x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001}.$

(AIME, 2001)

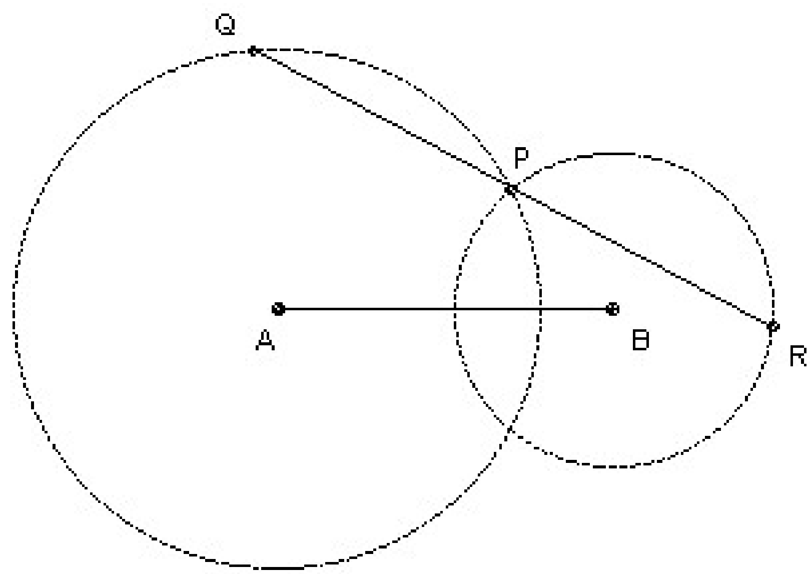
GEOMETRÍA.

1. Los puntos A y C están sobre la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{50}$. El punto B, interior al círculo, es tal que $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 2$. Determine OB.



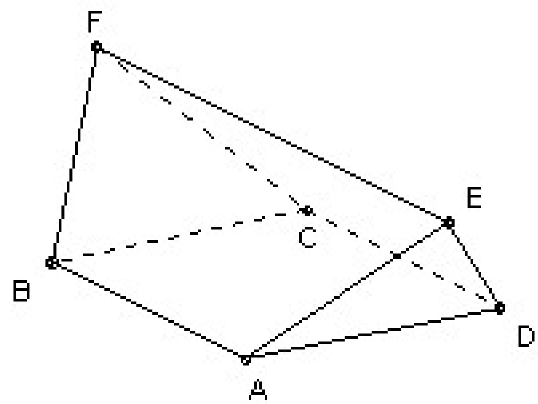
(AIME, 1983)

2. $AB = 12$. El círculo de centro A y radio 8, y el círculo de centro B y radio 6 se intersecan en P (y otro punto). Una recta que pasa por P interseca a los círculos en Q y R (con Q en el círculo mayor), tal que $QP = PR$. Determine QP^2.



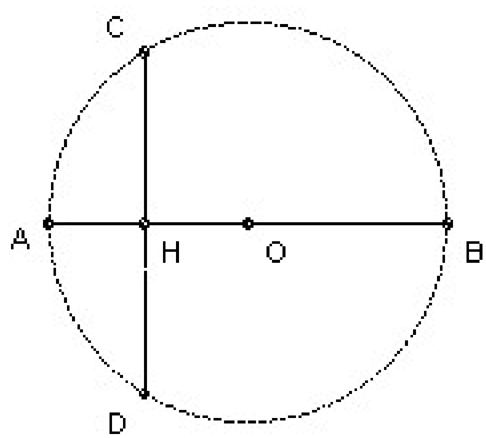
(AIME, 1983)

3. $ABCD$ es un cuadrado de lado $6\sqrt{2}$. $\overline{EF}$ es paralelo al cuadrado y tiene longitud $12\sqrt{2}$. Las caras BCF y ADE son equiláteras. Determine el volumen del sólido $ABCDEF$.



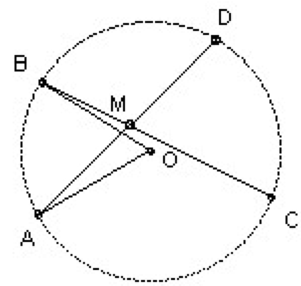
(AIME, 1983)

4. La cuerda CD es perpendicular al diámetro AB y se intersecan en H. Las distancias AB y CD son enteras. La distancia AB tiene dos dígitos y la distancia CD es obtenida invirtiendo los dígitos de AB. La distancia OH es racional. Determine AB.



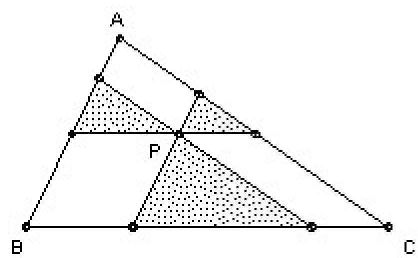
(AIME, 1983)

5. BC es una cuerda de longitud 6 de un círculo de centro O y radio 5. A es un punto en la circunferencia más cercano a B que a C tal que existe una cuerda AD la cual es bisecada por BC. Determine $sen \angle AOB$.



(AIME, 1983)

6. P es un punto en el interior del triángulo ABC. Se trazan tres segmentos que pasan por P y que son paralelos a los lados del triángulo. Las áreas de los tres triángulos resultantes con un vértice en P tiene áreas 4, 9 y 49. Determine el área de ABC.

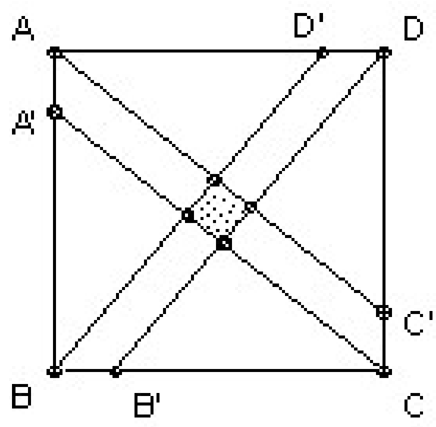


(AIME, 1984)

7. El tetraedro ABCD es tal que AB = 3, (ABC) = 15, (ABD) = 12 y el ángulo entre las caras ABC y ABD es 30^o. Determine su volumen.
(AIME, 1984)

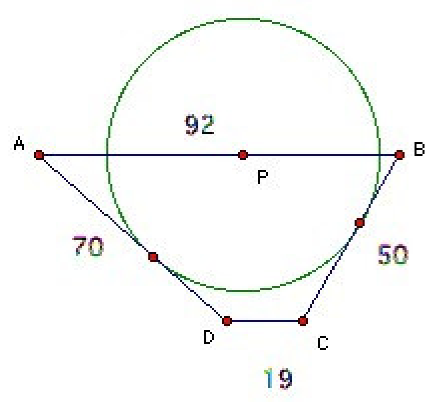
8. El triángulo ABC es tal que $\angle$ B = 90^o. Cuando éste es rotado sobre AB se obtiene un cono cuyo volumen es 800 π. Cuando es rotado sobre BC se obtiene un cono cuyo volumen es 1920 π. Determine la longitud de AC.
(AIME, 1985)

9. ABCD es un cuadrado de lado 1. Los puntos A', B', C', D' son dados sobre los lados AB, BC, CD, DA respectivamente tales que AA'/AB = BB'/BC = CC'/CD = DD'/DA = 1/n. La “tira” encerrada por las líneas AC' y A'C interseca a la “tira” encerrada por las líneas BD' y B'D en un cuadrado de área 1/1985. Determine n.



(AIME, 1985)

10. ABCD es un trapezoide con AB paralelo a CD, AB = 92, BC = 50, CD = 19, DA = 70. P es un punto sobre el lado AB tal que un círculo con centro P es tangente a AD y BC. Determine AP.



(AIME, 1992)

TEORÍA DE NÚMEROS.

1. ¿ Cuál es el residuo de dividir $6^{83} + 8^{83}$ por 49 ?
(AIME, 1983)

2. ¿Cuántos números de cuatro dígitos, cuyo dígito de las unidades de millar sea uno, tienen exactamente dos dígitos iguales ? (por ejemplo 1447, 1005 ó 1231)
(AIME, 1983)

3. Determine el menor entero positivo n tal que todos los dígitos del número 15n sean 8 ó 0.
(AIME, 1984)

4. Un número "*Simpático*" se define como el producto de sus divisores propios (los divisores propios de un número son los divisores positivos de un número excluyendo al 1 y él mismo).
Determine la suma de los primeros diez números simpáticos.
(AIME, 1987)

5. Determine el mayor entero k tal que 3^{11} es la suma de k enteros positivos consecutivos.
(AIME, 1987)

FUNCIONES O SUCESIONES.

1. Sean $x_1 = 97, x_2 = \dfrac{2}{x_1}, x_3 = \dfrac{3}{x_2}, x_4 = \dfrac{4}{x_3}, \cdots,, x_8 = \dfrac{8}{x_7}$. Determine $x_1 x_2 \cdots x_8$.

(AIME, 1985)

2. La sucesión $a_1, a_2, \cdots, a_{98}$ satisface $a_{n+1} = a_n + 1$ para $n = 1, 2, \cdots, 97$ y su suma es 137. Determine $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{98}$.

(AIME, 1984)

3. La sucesión $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$ tiene la propiedad de que, para cada k, x_k es k veces menor que la suma de los otros 99 números. Determine x_{50}.

(AIME, 2000)

4. La función f satisface $f(x) + f(x-1) = x^2$ para todo x, si $f(19) = 94$, determine el residuo de $f(94)$ cuando es dividido por 1000.

(AIME, 1994)

5. La función $f(m,n)$ definida para enteros positivos m, n satisface

$$\begin{cases} f(m,m) = m \\ f(m,n) = f(n,m) \\ f(m,m+n) = \left(1 + \dfrac{m}{n}\right) f(m,n) \end{cases}$$

Determine $f(14, 52)$.

(AIME, 1988)

4. CURIOSATO.

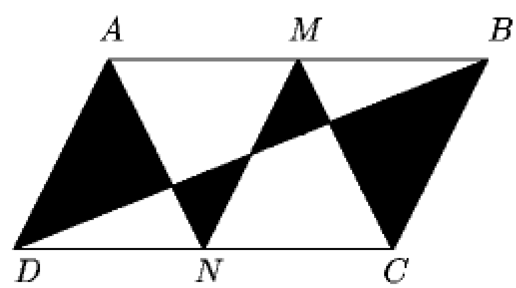
Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna tiene como finalidad mostrar ejercicios de preparación o competencia olímpicas en fases iniciales que se desarrollan en otros países.

Estos tipos de ejercicios son de selección única y se procurará brindar la solución de todos los ejercicios que se propongan. Es importante hacer notar que los mismos pueden servir de preparación para estudiantes que participan en los distintos niveles de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Continuamos con ejercicios correspondientes a los Problemas Introductorias de la Olimpiada Sonorense de Matemática, estado de la República de México.

Problema 76. Si el paralelogramo **ABCD** tiene área 1 m^2 y los puntos **M** y **N** son los puntos medios de los lados **AB** y **CD** respectivamente, ¿Qué área tiene la región sombreada?



(a) 3/12 (b) 1/3 (c) 5/12 (d) 1/2 (e) 7/12

Problema 77. Dos ciclistas recorren una pista cuadrada en direcciones opuestas. Partiendo de una esquina al mismo tiempo, la primera vez que se encuentran es en otra esquina y la segunda en una esquina distinta de las anteriores. Si ambos van a velocidad constante la razón de las velocidades es:

(a) 1:2 (b) 1:3 (c) 1:4 (d) 2:3 (e) 3:4

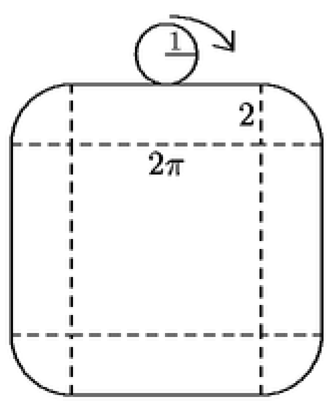
Problema 78. Luis Miguel compró una bolsa con 2000 caramelos de 5 colores; 387 de eran blancos, 396 amarillos, 402 rojos, 407 verdes y 408 cafés. Decidió comerse los caramelos de la siguiente forma: Sin mirar sacaba tres de la bolsa. Si los tres eran del mismo color, se los comía, si no, los regresaba a la bolsa. Continuó así hasta que sólo quedaron dos caramelos en la bolsa. ¿De qué color eran?

(a) Blancos (b) Amarillos (c) Rojos (d) Verdes (e) Cafés

Problema 79. En un triángulo **ABC**, siete segmentos paralelos al lado **BC** y con extremos en los otros dos lados del triángulo dividen en 8 partes iguales al lado **AC**. Si **BC** = 10, ¿cuál es la suma de las longitudes de los siete segmentos?

(a) Faltan datos (b) 50 (c) 70 (d) 35 (e) 45

Problema 80. Un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ se "redondea" añadiéndole un marco de 2 cm de ancho (en las esquinas se han puesto cuartos de círculo). Una rueda de radio 1 cm se desplaza a lo largo del cuadrado redondeado (siempre tocándolo). ¿Cuántas vueltas completas dará la rueda alrededor de sí misma antes de completar una vuelta alrededor del cuadrado redondeado?



(a) 3 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

Problema 81. Una pedazo rectangular de piel mágica se reduce a la mitad de su longitud y a la tercera parte de su ancho después de cumplirle un deseo a su dueño. Después de tres deseos tiene un área de 4 cm^2. Si su ancho inicial era de 9 cm, ¿cuál era su largo inicial?

(a) Faltan datos (b) 96 cm (c) 288 cm (d) 32 cm (e) 144 cm

Problema 82. En un campamento de verano 96 niños van a separarse en grupos de forma que cada grupo tenga el mismo número de niños. ¿De cuántas maneras puede hacerse la separación si cada grupo debe de tener más de 5 pero menos de 20 niños?

(a) 10 (b) 8 (c) 5 (d) 4 (e) 2

Problema 83. Si haces la división de 1 entre 5^{2000}, ¿cuál será el último dígito que aparezca antes de llegar a puros **0**'s?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 5

Problema 84. ¿Cuál de los siguientes números es más grande?

(a) 2^{12} (b) 4^{15} (c) 8^{11} (d) 12^{8} (e) 32^{6}

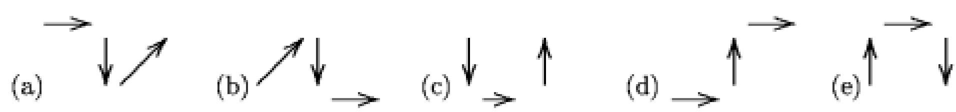
Problema 85. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{1998} \times 5^{2002}$?

(a) 1999 (b) 2000 (c) 2001 (d) 2002 (e) 2003

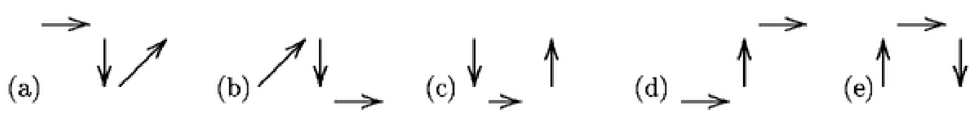
Problema 86. Omar le da a cada uno de sus libros una clave de tres letras utilizando el orden alfabético: **AAA**, **AAB**, **AAC**,... **AAZ**, **ABA**, **ABB**, etc. Considerando el alfabeto de 26 letras y que Omar tiene 2203 libros, ¿cuál fue el último código que Omar utilizó en su colección?

(a) **CFS** (b) **CHT** (c) **DGS** (d) **DFT** (e) **DGU**

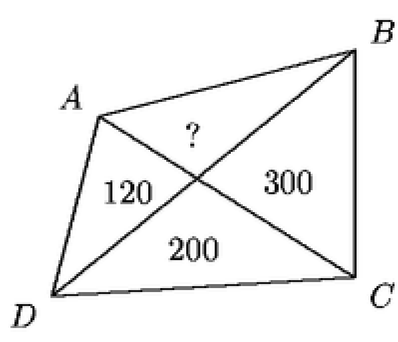
Problema 87. Se escriben los números enteros del 0 al 2000 y se dibujan flechas entre ellos con el siguiente patrón:



y así sucesivamente. ¿Cuál es la sucesión de flechas que llevan del 1997 al 2000?



Problema 88. Un pastel tiene forma de cuadrilátero. Lo partimos por sus diagonales en cuatro partes, como se indica en la figura. Yo me comí una parte, y después pesé las otras tres: un pedazo de 120 g, uno de 200 g y otro de 300 g. ¿Cuánto pesaba la parte que yo me comí?

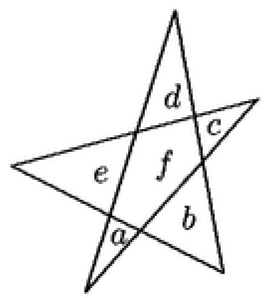


(a) 120 (b) 180 (c) 280 (d) 330 (e) 550

Problema 89. Tomando tres vértices cualesquiera de un cubo se forma un triángulo. Del total de triángulos que pueden formarse de esa manera, ¿cuántos son equiláteros?

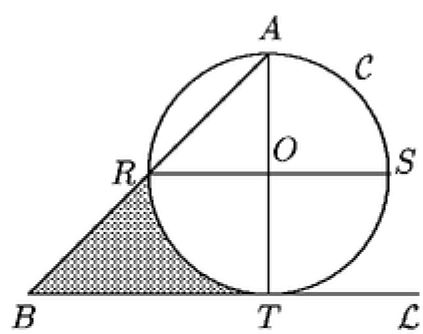
(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 48 (e) 56

Problema 90. En la figura, **a**,**b**,**c**,**d**,**e** y **f** son las áreas de las regiones correspondientes. Si todos ellos son números enteros positivos diferentes entre sí y menores que 10, cada triángulo formado por tres regiones tiene área par y el área de la estrella completa es 31, el valor de **f** es:



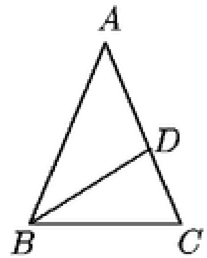
(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 91. El círculo $\mathcal{C}$de la figura tiene centro **O** y su diámetro mide 3. Los segmentos **AT** y **RS** son diámetros perpendiculares del círculo. La recta $\mathcal{L}$es tangente al círculo en el punto **T**; **B** es la intersección de la recta $\mathcal{L}$con la recta **AR**. Calcular el área de la región sombreada (delimitada por los segmentos **BR** y **BT** y el arco de círculo de **RT**.)



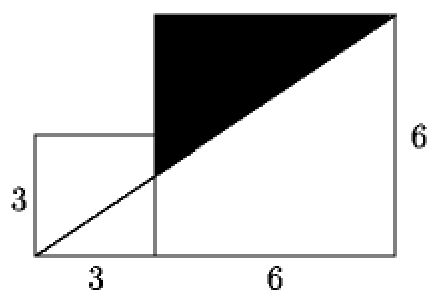
(a)$3\pi/2 - 9/16$ (b)$2\pi/3$ (c)$^{9-\pi}/16$ (d) $\frac{3}{4\pi}$ (e)$27/8 - 9/16$

Problema 92. En la siguiente figura **ABC** es un triángulo con **AB** = **AC** y **D** un punto sobre **CA** con **BC** = **BD** = **DA**. El valor del ángulo **ABD** es:



(a) 30° (b) 36° (c) 40° (d) 45° (e) 60°

Problema 93. En la figura, cada lado del cuadrado más pequeño mide 3 y cada lado del cuadrado más grande mide 6, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?

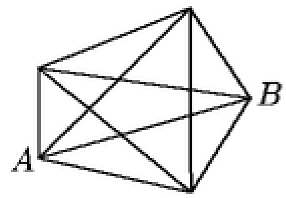


(a) 6 (b) 10 (c) 12 (d) 18 (e) 24

Problema 94. Edgar y Raúl apostaron según las siguientes reglas: Van a lanzar un dado normal (con los números del 1 al 6 en sus caras) y una moneda (con los números 1 y 2 marcados en sus caras). Después multiplicarán el número que salga en el dado con el que salga en la moneda. Si el resultado es par gana Edgar, y si es impar gana Raúl. ¿Qué probabilidad de ganar tiene Edgar?

(a) 1/2 (b) 1/3 (c) 2/3 (d) 3/4 (e) 5/6

Problema 95. ¿Cuántas formas hay de llegar de **A** a **B** si no se puede pasar dos veces por el mismo punto?



(a) 10 (b) 12 (c) 16 (d) 18 (e) 20

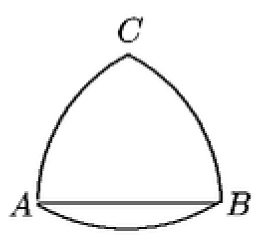
Problema 96. Si $\mathbf{x^2 + y^2 = 6xy}$, con $\mathbf{x \neq y}$, ¿a qué es igual $\mathbf{(x + y)/(x - y)}$?

(a) 1 (b)$\sqrt{2}$ (c)$\sqrt{3}$ (d) 2 (e)$\sqrt{6}$

Problema 97. En un cuadrado **ABCD** de lado 1 está inscrito un triángulo **AEF** de tal forma que **E** está sobre **BC** y **F** está sobre **CD**. Las longitudes de los lados **AE** y **AF** son iguales y son el doble de la longitud del lado **EF**. Calcular la longitud de **EF**.

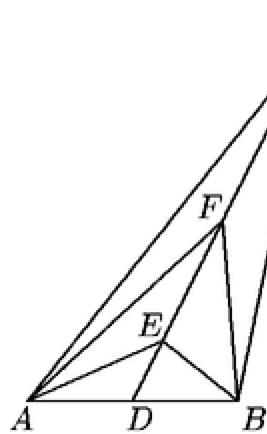
(a)$(\sqrt{30} - 2)/7$ (b) $\frac{(\sqrt{28})}{7}$ (c)$(-\sqrt{2}+\sqrt{30})/7$ (d)$\sqrt{30}/2$ (e)$\sqrt{2}-\sqrt{30}$

Problema 98. En la figura, **AB** es el arco de un círculo centrado en C, **BC** es el arco de un círculo centrado en **A**, **AC** es el arco de un círculo centrado en **B**. Si la recta **AB** mide 1, ¿Cuál es el área de la figura?



(a)$2\sqrt{2}+5/\sqrt{3}$ (b)$3\pi-\sqrt{3}/2$ (c)$\pi(\sqrt{3}+5)$ (d)$(\pi-\sqrt{3})/2$ (e)$(\pi-5\sqrt{3}/2)$

Problema 99. ¿Cuál es el área del triángulo **ABC**, si **AD** = **BD** = **DE**, **EF** = 2**AD**, **CF** = 3**AD** y el área de **ADE** = 1?



(a) 4.5 (b) 6 (c) 8 (d) 9 (e) 12

Problema 100. Encontrar el valor de **xyz** donde **x**,**y**,**z** son números positivos que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{x^2 + {}^1/_y + z = 9}$$
$$\mathbf{x^2 + {}^1/_y - z = 3}$$
$$\mathbf{x^2 - {}^1/_y + z = 5}$$

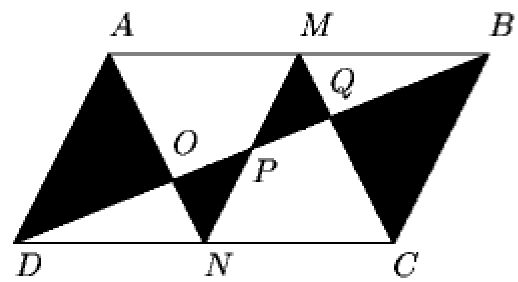
(a) 1/15 (b) 1/3 (c) 1/2 (d) 3 (e) 4

5. Solución al *CURIOSATO*

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

A continuación brindamos la solución al *CURIOSATO* de esta edición.
Les recordamos que las soluciones que se brindan en esta columna solamente son unas guías de solución y que no pretenden, de ningún modo, limitar la riqueza e inventiva de solución a ejercicios de esta naturaleza.

Solución 76.
Si **XYZ** es un triángulo, denotemos su área como **(XYZ)**. El triángulo **ADO** es semejante al triángulo **ONP** en razón **1:2**, así **OD** = 2**OP**. Como los triángulos **ODN** y **ONP** comparten la altura trazada desde el vértice **N**, entonces **(ONP)** = 1/2 **(ODN)**. Por el mismo argumento 1/2 **(ODN)** = **(ADO)**. Luego entonces **(ADO)** + **(ONP)** = 5/6 **(ADN)** = 5/6(1/4) = 5/24. Análogamente el área de la región sombreada en el paralelogramo **MBCN** también es 5/24, y el total del área sombreada es 2(5/24)=5/12. La respuesta es (c).



Solución 77.
Llamemos a los ciclistas **A** y **B**. Si el ciclista **A** se encuentra con el ciclista **B** en la primera esquina a la que llega una vez iniciado su recorrido, significa que **B** recorrió tres lados del cuadrado mientras **A** recorrió uno, y la razón entre sus velocidades es **1:3**. Si se encuentran en la segunda esquina a partir de que **A** inició su recorrido, entonces la velocidad de **A** es la misma que la de **B** (recorrieron la misma distancia en el mismo tiempo), pero la tercera vez se

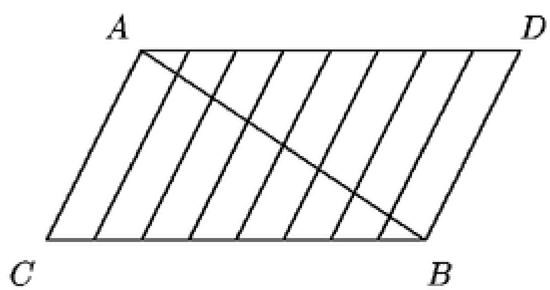
encontrarían en la misma esquina donde empezaron, lo cual no puede ser. Por el mismo razonamiento del primer caso, si se encuentran en la tercera esquina a la que llegó **A**, la razón entre sus velocidades es **1:3**. La respuesta es (b).

Solución 78.

Como se comió los dulces de 3 en 3, sólo pueden quedar dulces de aquéllos de los que originalmente no había una cantidad múltiplo de 3: los verdes. La respuesta es (d).

Solución 79.

Tracemos por **A** una paralela a **BC** y por **B** una paralela a **AC**. Si **D** es su punto de intersección, cada uno de los segmentos paralelos a **AC** que se han dibujado son del mismo tamaño. La suma de las longitudes de los segmentos paralelos dentro del triángulo **ABC** es igual a la suma de las longitudes de los segmentos paralelos dentro del triángulo **ABD**. Así, la suma de los segmentos en un solo triángulo es igual a (7x10)/2 = 35. La respuesta es (d).



Solución 80.

El perímetro del cuadrado redondeado es 4 x 2π + (4 x 2π x 2/4) = 12π, y esto es 6 veces el perímetro de la rueda, que es de 2π. La respuesta es (b).

Solución 81.

Cada vez que se concede un deseo el pedazo de piel se reduce a 1/6 de su área. Después de conceder 3 deseos, el pedazo de piel tiene un área de 1/6 x 1/6 x 1/6 = 1/216 veces el área original. Al principio, el pedazo de piel tenía un área de 4 x 216=864 cm^2, y como se trataba de un rectángulo donde una arista medía 9 cm, la otra medía 96 cm. La respuesta es (b).

Solución 82.

Observemos que 96 = 2^5 x 3. Entonces los únicos divisores de 96 que están entre 5 y 20 son 2 x 3 = 6, 2^2 x 3=12, 2^3=8 y 2^4=16. Por lo tanto sólo podemos hacer equipos de cuatro maneras diferentes. La respuesta es (d).

Solución 83.

Dividir 1 entre 5^{2000} es lo mismo que calcular $(1/5)^{2000}$ = (0.2)^^{2000}. Al elevar 0.2 a alguna potencia, observemos el comportamiento de su última cifra:

$$(0.2)^1 = ...\,2$$
$$(0.2)^2 = ...\,4$$
$$(0.2)^3 = ...\,8$$
$$(0.2)^4 = ...\,6$$
$$(0.2)^5 = ...\,2$$

.

.

.

La secuencia se repite en lo sucesivo cada 4 números y, como 2000 es múltiplo de 4, es fácil observar que la última cifra no cero en la división será 6. La respuesta es (c).

Solución 84.

Tenemos que

$$4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30}$$
$$8^{11} = (2^3)^{11} = 2^{33}$$
$$16^8 = (2^4)^8 = 2^{32}$$
$$32^6 = (2^5)^6 = 2^{30}$$

El más grande es 8^{11}. La respuesta es (c).

Solución 85.

Agrupemos todos los **2**'s y los **5**'s que podamos:2^{1998} x 5^{2002}=(2 x 5)1998 x 5^4=625 x 10^{1998}. La respuesta es (c).

Solución 86.

De la **A** a la **Z**, en orden, hay 26 letras, así que de **AAA** a **AAZ** hay 26 códigos (**AAZ** es el número 26). De la misma manera, de **AAA** a **AZZ** hay 26 x 26 = 676 códigos. Podemos ver que 2203 = 676 x 3 + 175, así que aún nos faltan 175 códigos después de **CZZ**, que es el código 3 x 26 x 26 = 2028. Como 175 = 6 x 26 + 19, después de **DFZ** (que es el código 626 + 26 x 6) nos faltan aún 19 códigos, así que la etiqueta es **DGS**. La respuesta es (c).

Solución 87.

La sucesión de flechas es periódica y se repite cada 6 números. Tenemos que 1997 = (6 ... 332) + 5, así es que la sucesión de 1997 a 2000 es la misma que de 5 a 8. La respuesta es (e).

Solución 88.

Para un triángulo **XYZ**, denotemos su área por **(XYZ)**. Tenemos entonces que

(BAP) / **(BCP)** = **AP** x **h** / **PC** x **h** = **AP** / **PC**

(DAP) / **(CDP)** = **AP** x **h** / **PC** x **h** = **AP** / **PC**

(DAP) / **(CDP)** = **(BAP)** / **(BCP)**, de donde **(BAP)** / **120** = 300 / 200 y **(BAP)** = 180

La respuesta es (b).

Solución 89.

Observemos que los lados de los triángulos que se forman al tomar tres vértices, sólo pueden ser aristas del cubo, diagonales de alguna cara o diagonales del cubo. Es fácil observar que todos los triángulos que tienen a una diagonal del cubo como uno de sus lados son rectángulos (y por lo tanto no son equiláteros). Por otra parte, los triángulos que tienen aristas como dos de sus lados (a partir del mismo vértice) también son rectángulos. Fijándonos ahora en las diagonales de caras, observemos que los únicos triángulos equiláteros se forman con las diagonales de tres caras que coinciden en un vértice y que no pasan por él, y habrá tantos triángulos equiláteros como vértices tiene el cubo: ocho. La respuesta es (b).

Solución 90.

Como **a + f + d** es par, y **b + f + d** es par también, tenemos que **a** y **b** son los dos pares o los dos impares. Usando el mismo argumento, llegamos a que **a, b, c, d** y **e** tienen la misma paridad. Así **f** tiene que ser par, puesto que **a + d** es par (suma de dos pares o de dos impares). Luego **a, b, c, d** y **e** tienen que ser impares porque la suma de las áreas es 31. Entonces **a, b, c, d** y **e** son los números del 1 al 9 en algún orden, y **f** = 31-1-3-5-7-9=6. La respuesta es (d).

Solución 91.

Los triángulos **ABT** y **ARO** son semejantes en razón **2:1** pues **O** es el punto medio de **AT**, y **RO** es paralela a **BT**; así, como en el triángulo **ARO** los lados **AO** y **RO** son iguales, también lo son sus correspondientes en el triángulo **ABT**, es decir, **BT** = **AT**; por tanto **BT** = 3. El área buscada es:

área **(ABT)** - área **(ARO)** - 1/4 área ($\mathcal{C}$ = 3 x 3/2 - (3/2 x(3/2)/2) - $^{1\pi}$/4 x $(3/2)^2$=27/8-$^{9\pi}$/16.

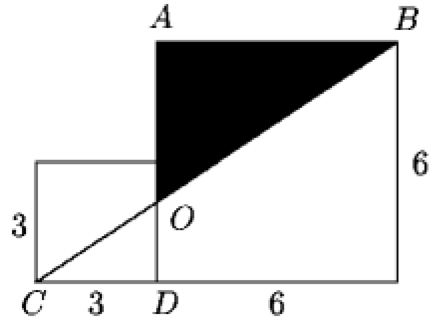
La respuesta es (e) .

Solución 92.

El triángulo **ABC** es isósceles y ∠**ABC** = ∠**ACB**. Como el triángulo **BCD** es isósceles también, ∠**ABD** = ∠**BDA**. Como **BCD** es isósceles también, y usando que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, tenemos ∠**BCD** = ∠**BDC** =180° – **BDA** = ∠**ABD** + ∠**BAD** = 2 ∠**ABD**. Luego 5∠ **ABD** = 180° y ∠**ABD** = 36°. La respuesta es (b).

Solución 93.

Observemos que el triángulo **ABO** es semejante al triángulo **DCO** en razón **2:1** (**AB** = 2**CD**). Entonces **AO** = 2**DO**, pero como **AO** + **DO** = 6, tenemos que **AO** = 4. Por lo tanto el área del triángulo sombreado es (**AB** x **AO**)/2= 6 x 4/2=12. La respuesta es (c).

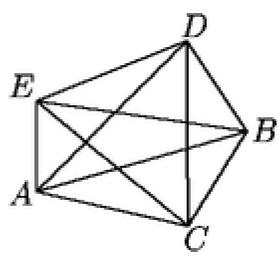


Solución 94.

Si alguno de los números que salen (o en el dado o en la moneda) es par, el resultado es par. Hay probabilidad de 1/2 de que salga el 2 en la moneda, y la probabilidad de que si salga 1 en la moneda y un número par en el dado es de 1/2 x 1/2 = 1/4. Así, la probabilidad de que gane Edgar es 1/2 + 1/4 = 3/4. La respuesta es (c).

Solución 95.

Representemos cada camino como una cadena de letras. Así, el camino **ACEDB** es el que recorre los segmentos **AC**, **CE**, **ED** y **DB**. Todas las cadenas deben empezar en **A** y terminar en **B**, y tienen a lo más 5 letras (no se puede pasar por el mismo vértice dos veces). Hay una sola cadena de dos letras que representa un camino válido: **AB**. Hay 3 cadenas de tres letras que representan caminos válidos: **ACB**, **ADB**, **AEB**. Los caminos que pasan por cuatro vértices son de la forma **A _ _ B**, donde hay 6 opciones para poner en lugar de las líneas: **CD**, **DE**, **CE**, **DC**, **ED** y **EC**. Por la misma razón, pasando por los cinco vértices hay tantos caminos como cadenas diferentes con tres letras distintas: **CED**, **CED**, **EDC**, **ECD**, **DEC** y **DCE**. En total son 1+ 3 + 6 + 6 = 16 formas. La respuesta es (c).



Solución 96.

Tenemos que **$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 8xy$**, así que, despejando, **$x + y =$** $\sqrt{8xy}$.

De la misma manera, de **$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 4xy$** obtenemos **$x + y =$** $\sqrt{4xy}$.

Entonces $(x + y)/(x - y)=\sqrt{8xy}/\sqrt{4xy}=\sqrt{\frac{8xy}{4xy}}=\sqrt{2}$. La respuesta es (c).

Solución 97.

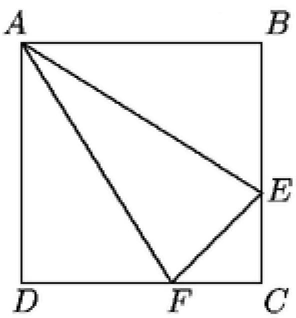
Tenemos que **BE** = 1 - **EC**, **FC** = **EC** y **AE** = 2**EF**. Aplicando el Teorema de Pitágoras en **EFC** obtenemos $\mathbf{EF}^2 = \mathbf{EC}^2 + \mathbf{EC}^2$, de donde **EC = (1/$\sqrt{2}$)EF**. Apliquemos el Teorema de Pitágoras al triángulo **ABE** y sustituyamos el valor de **EC** que acabamos de obtener:

$$(2\mathbf{EF})^2 = 1+(1-\mathbf{EC})^2$$

$$4\mathbf{EF}^2 = 1+1-2\mathbf{EC} + \mathbf{EC}^2 = 2 - 2\,\mathbf{EC} + \mathbf{EC}^2$$

$$= 2 - 2((1/\sqrt{2})\mathbf{EF})+1/2 \times \mathbf{EF}^2 \quad 7/2\,\mathbf{EF}^2 + \sqrt{2}\mathbf{EF} - 2 = 0$$

Resolviendo obtenemos **EF** = $1/7(-\sqrt{2} \pm \sqrt{30})$. Como **EF** es una longitud, tomamos el valor positivo en la raíz y, por lo tanto **EF** = $1/7(-\sqrt{2}+\sqrt{30})$. La respuesta es (c).

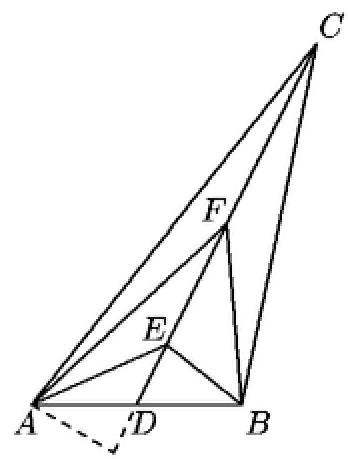


Solución 98.

Los tres arcos fueron trazados con el mismo radio, luego el triángulo **ABC** es equilátero de lado 1. Como en el triángulo equilátero todos los ángulos son iguales a 60° entonces tenemos que el área del sector **CB** es una sexta parte del área del círculo, es decir, $(\pi\, \mathbf{r}^2)/6=\pi/6$; análogamente las áreas de los sectores **AB** y **AC** son $\pi/6$, respectivamente. El área de la figura es la suma del área de los tres sectores menos dos veces el área del triángulo **ABC**. La altura del triángulo **ABC** es $\sqrt{3}/2$, entonces su área es **bh**/2=(1 x ($\sqrt{3}$/2))/2=$\sqrt{3}/4$ Por lo tanto, el área de la figura es: **A** = $3(\pi/6) - 2(\sqrt{3}/4) = (\pi - \sqrt{3})/2$. La respuesta es (d).

Solución 99.

El área del triángulo **ADE** es 1. La altura trazada desde el vértice **A** de los triángulos **ADE** y **AEF** es la misma, pero la base del triángulo **AEF** es el doble de la base del triángulo **ADE**, por lo tanto, el área del triángulo **AEF** es 2.
Análogamente, la altura del triángulo **ADE** es igual a la altura del triángulo **AFC** y, como la base del triángulo **AFC** es el triple de la base del triángulo **ADE**, el área del triángulo **AFC** es 3. El área del triángulo **DBE** es igual al área del triángulo **ADE** ya que tienen la misma base y la misma altura. De la misma manera que en los casos anteriores, las áreas de los triángulos **BEF** y **BFC** son el doble y el triple, respectivamente, del área del triángulo **BDE**; entonces tenemos que el área del triángulo **ABC** = 2 x 1+2 x 2+2 x 3=12. La respuesta es (e).



Solución 100.

Sumando las dos últimas ecuaciones obtenemos $2\mathbf{x}^2=8$, de donde **x** = 2. Sumando la primera y tercera ecuaciones tenemos que $2\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{z} = 9$. Sustituyendo el valor de **x** y despejando llegamos a **z** = 3. Sustituyendo **x** y **z** en la segunda ecuación, tenemos que **y** = 1/2. Por lo tanto **xyz** = 3. La respuesta es (d).

6. Solución a los problemas anteriores de la columna "Olimpiadas alrededor del mundo".

Randall Godínez.
Arlene Martínez.
Melissa Ramírez.
Carlos Rodríguez.

Presentamos, a continuación, la solución de los diez problemas presentados en esta misma columna pero de la edición anterior. Hemos procurado adjuntar varias soluciones a los problemas con el fin de hacer notar que los mismos pueden ser enfocados y resueltos de diversas formas y que ello es lo que se busca en las competencias olímpicas: favorecer el pleno desarrollo de la creatividad del participante al momento de enfrentar los problemas y de ninguna manera encajonar su pensamiento.

Al mismo tiempo que se presenta una solución a determinado problema se advierte, cuando ello lo amerita, la teoría que se está aplicando en la solución del mismo con el fin de que se cuente con todo el marco teórico que se requiera para poder resolver otros problemas que puedan ubicarse en la misma categoría o bien que puedan reducirse a ellos.

Cuando se indique que la solución es oficial lo que se pretende indicar es que esa es la solución que se dio en la competencia señalada por parte del comité organizador o bien de su proponente.

Recuérdese que ningún problema está completamente cerrado por lo que se les solicita a nuestros estimables lectores que nos envíen sus comentarios o sugerencias que tengan a esta columna en particular mediante alguno de los correos indicados en la presentación.

Pues bien, veamos las soluciones de la columna anterior !!

1. Sobre una mesa hay 1999 fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuál de sus dos lados está hacia arriba). Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las siguientes cosas:

(i) Retira un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba,

(ii) Voltea un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas tengan el mismo color hacer arriba. Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál jugador puede asegurar que ganará, el primero en jugar o el segundo?

(Décima Tercera Olimpiada Nacional de Matemáticas, Oaxaca, México, noviembre de 1999)

SOLUCIÓN OFICIAL:

El primer jugador tiene estrategia ganadora. Como 1999 es impar, el número de fichas con el lado rojo hacia arriba y el número de fichas con el lado negro hacia arriba son distintos. Entonces, el primer jugador en su turno puede hacer que el número de fichas rojas sea igual al número de fichas negras quitando de las que haya más. No importa qué haga el segundo jugador, dejará cantidades diferentes de fichas rojas y negras. Después el primer jugador vuelve a hacer que haya el mismo número de fichas rojas que negras. Como al segundo siempre le toca jugar cuando hay la misma cantidad de rojas que negras, no puede evitar dejar cantidades diferentes de fichas rojas y negras, por lo tanto gana el primero.

2. Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

(XXXIV Olimpiada Matemática Española, Fase nacional 1998 (Tarazona))

SOLUCIÓN OFICIAL:

Sea n un número verificando el enunciado, y s la suma de sus cifras.

Como $1000 \le n \le 9999$ y $n = s^3$, resulta $11 \le s \le 21$ (1)

Si n = xyzt, tenemos:

$$1000x + 100y + 10z + t = s^3 \qquad (2)$$

$$x + y + z + t = s$$

restando queda:

$$999x + 99y + 9z = s^3 - s \qquad (3)$$

cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, habida cuenta de que $s^3 - s = (s - 1)\, s\, (s + 1)$ y por (1), sólo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9: $16 \cdot 17 \cdot 18$; $17 \cdot 18 \cdot 19$ y $18 \cdot 19 \cdot 20$ sustituimos en (3) y analizamos cada caso.

1º : $999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$ resulta inmediatamente $x = 4$; $y = 9$; $z = 1$, valores que llevados a (2) con $s = 17$ se obtiene $t = 3$ y finalmente $n = 4913$

2º : $999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$ de donde $x = 5$; $y = 8$; $z = 3$, valores que llevados a (2) con $s = 18$ se obtiene $t = 2$ y finalmente $n = 5832$

3º : $999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$ resulta $x = 6$; $y = 8$; $z = 6$, valores que llevados a (2) con $s = 19$ resulta una contradicción.

Resumiendo, las únicas soluciones son 4913 y 5832.

3. Hallar todas las funciones $\mathbf{f:N \to N}$ estrictamente crecientes y tales que: f(n + f(n)) = 2 f(n) para n = 1, 2, 3, ...

(XXXIV Olimpiada Matemática Española, Fase nacional 1998 (Tarazona))

SOLUCIÓN OFICIAL:

Supongamos f(1) = b. Entonces, f(1 + b) = 2b, como f es estrictamente creciente, se tiene:

$$b = f(1) < f(1+1) < \ldots < f(1+b) = 2b = b + b.$$

y resulta que f(1), f(2),….f(1+ b) son b + 1 naturales, distintos, el primero vale b y el último 2b, por tanto han de ser consecutivos. Resulta entonces:

$$f(1) = b,\ f(2) = 1 + b,\ f(3) = 2 + b, \ldots\ldots, f(1 + b) = b + b.$$

En general, para n > 1, si f(n) = c , f(n + c) = 2c = c + c y resulta que:

c = f(n) < f(n + 1) <….< f(n + c) = c + c y los números f(n), f(n + 1), ….., f(n + c) son consecutivos.

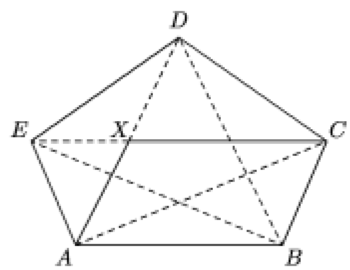
Así pues,

$$f(n) = n - 1 + f(1)$$

4. Sea ABCDE un pentágono (convexo) de manera que los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA, y EAB son todos de igual área. Demuestra que: $^1/_4$ área(ABCDE) < área(ABC) < $^1/_3$ área(ABCDE). (Novena Olimpiada Nacional de Matemáticas, México, Colima, noviembre de 1995)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Si las áreas de los triángulos $\triangle$ABC y $\triangle$BCD son iguales, como tienen la misma base BC, entonces las alturas son iguales y así los vértices A y D se encuentran sobre una línea paralela a BC, es decir AD || BC. Por la misma razón, como las áreas de los triángulos $\triangle$EAB y $\triangle$ABC son iguales se tiene que AB || CE; lo anterior implica que ABCX es un paralelogramo, donde X es la intersección de AD y CE. En el paralelogramo ABCX, es claro que las áreas de los triángulos $\triangle$ABC y $\triangle$ACX son iguales.



También observemos que el área del $\triangle$AXE es estrictamente menor que el área del $\triangle$DEA (la base AX es estrictamente menor que la base AD y ambos tienen la misma altura sobre tales bases). Finalmente se tiene que el área del $\triangle$ACE es mayor que el área del triángulo $\triangle$ACX (la base AE del $\triangle$ACE es mayor que la base AX del $\triangle$ACX y ambos tienen la misma altura sobre esta base).

Si (XYZ...) denota el área de la figura XYZ... tenemos:

$$(ABCDE) = (ABC) + (ACX) + (CDE) + (EAX)$$
$$= 3(ABC) + (EAX) < 4(ABC)$$

por tanto $^1/_4$(ABCDE) < (ABC)

y también (ABCDE) = (ABC) + (CDE) + (EAC) > 3(ABC)

y de aquí que (ABC) < $^1/_3$(ABCDE)

5. Demostrar, que dados tres números positivos, podemos tomar dos de ellos, digamos x y y con $x > y$ tales que

$$\frac{x-y}{1+xy} < 1.$$

(XIV Olimpiada Portuguesa de Matemática, Categoría B (10º, 11º, 12º) Final Nacional 1996)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Sean a, b y c tres números positivos tales que $0 < a < b < c.$

Si $b > 1$ basta tomar $x = c$ y $y = b.$ En efecto, en tal caso se tiene

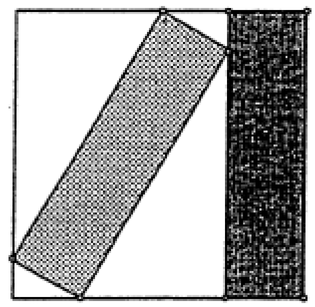
$$x < xy \Rightarrow x - y < xy \Rightarrow$$

$$x - y < 1 + xy \Leftrightarrow \tfrac{x-y}{1+xy} < 1.$$

Si $b \leq 1$ tomemos $x = b$ y $y = a.$ Entonces

$$x - y < 1 \Rightarrow \tfrac{x-y}{1+xy} < 1.$$

6. Un cuadrado de un metro de lado es dividido en dos rectángulos de modo que al colocar el menor de ellos sobre el mayor lo hacemos de forma que sobre cada lado del rectángulo mayor esté un vértice del menor, como se indica en la figura.

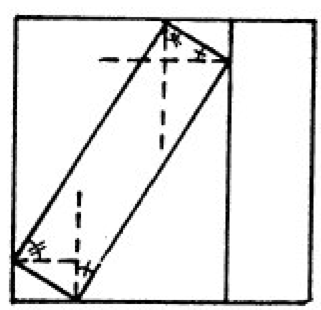


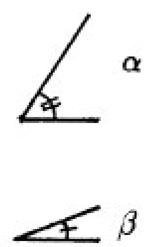
¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo menor?
(XIV Olimpiada Portuguesa de Matemática, Categoría B (10°, 11°, 12°) II Eliminatoria 1996)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Es claro que la mayor longitud del rectángulo menor es uno. Sea a la longitud menor de dicho rectángulo.

Consideremos la figura siguiente:





Proyectando los lados del rectángulo menor sobre los lados del mayor obtenemos las relaciones $\cos\alpha + a\cos\beta = 1 - a$ y $\cos\beta + a\cos\alpha = 1.$

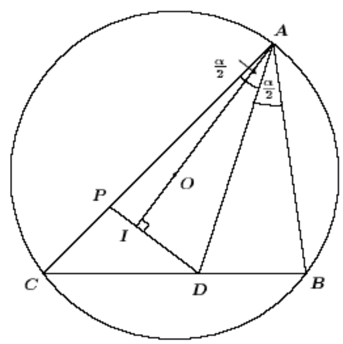
Como $\beta = 90^\circ - \alpha,$ podemos escribir ambas ecuaciones como $\cos\alpha + a\,sen\,\alpha = 1 - a$ y $sen\,\alpha + a\cos\alpha = 1.$

De la segunda ecuación obtenemos $a = \dfrac{1 - sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}$, que después de sustituir esta última expresión en la primera ecuación y utilizando una fórmula elemental de trigonometría, permite obtener $\cos\ \alpha = \dfrac{1}{2}$. Con lo que $a = \dfrac{1 - \sqrt{3}/2}{1/2} = 2 - \sqrt{3}$. Así, las dimensiones del rectángulo menor son 1 y $2 - \sqrt{3}$ metros.

7. Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en un círculo con centro O. Sea D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con BC y suponga que la perpendicular a AO pasa por D interseca al segmento AC en un punto P (P $\in$ AC). Pruebe que AB = AP.
(XI Olimpiada Italiana de Matemática, 1995)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Consideremos la figura adjunta



Desde que ABC es un triángulo acutángulo, O está en su interior. Como P $\in$ AC entonces P está en el interior del triángulo ADC. Tenemos que $\angle$ AOC = 2β y OA = OC, por lo que $\angle$ CAO = $\dfrac{1}{2}(\pi - 2\beta) = \dfrac{\pi}{2} - \beta$. Así, $\angle$ OAD = $\dfrac{\alpha}{2} -$ $\angle$ CAO = $\dfrac{\alpha}{2} + \beta - \dfrac{\pi}{2}$.

Sea I = PD $\cap$ AO. Tenemos que el triángulo AID es rectángulo en I. Entonces

$$\begin{aligned} \angle PDA &= \angle IDA = \frac{\pi}{2} - \angle OAD \\ &= \pi - \frac{\alpha}{2} - \beta = \angle BDA\,. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que los triángulos ABD y APD son semejantes con AD en común con lo que los triángulos ABD y APD son isométricos, así que AP = AB.

8. Hallar todas las parejas x y y tales que

$$x^2 + 615 = 2^y .$$

(XI Olimpiada Italiana de Matemática, 1995)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Notemos primero que, para todo entero no negativo k,

$$2^{2k+1} \equiv 4^k \cdot 2 \equiv (-1)^k \cdot 2 \equiv 2 \text{ ó } 3 \ (\text{mód } 5)$$

Desde que $x^2 \equiv 0, 1 \text{ ó } 4 \ (\text{mód } 5)$, y debe ser par. Hagamos $y = 2z$, entonces $x^2 + 615 = 2^y$ es equivalente a $\left(2^z - x\right)\left(2^z + x\right) = 615$. Como 615 = 3 × 5 × 41 entonces debemos analizar únicamente los siguientes cuatro casos:

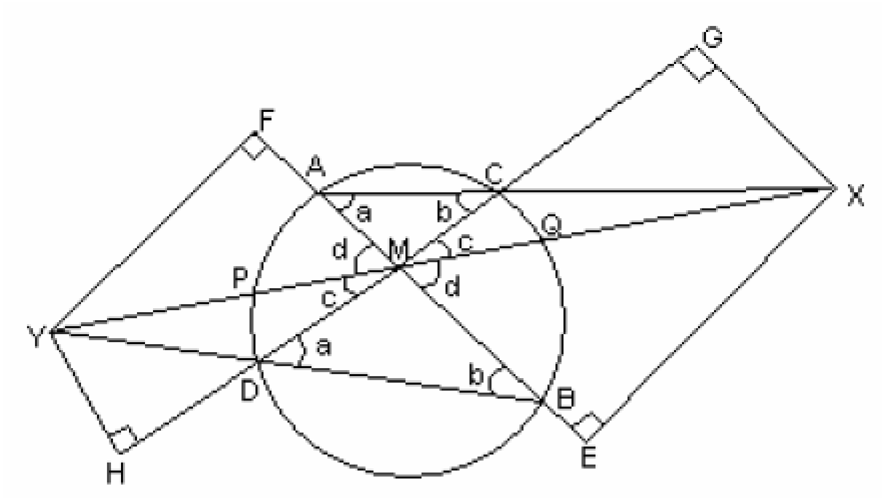
$$\begin{array}{llll}
(1) & 2^z + x = 615, & 2^z - x = 1; \\
(2) & 2^z + x = 205, & 2^z - x = 3; \\
(3) & 2^z + x = 123, & 2^z - x = 5; \\
(4) & 2^z + x = 41, & 2^z - x = 15.
\end{array}$$

Los casos (1), (2) y (4) claramente no producen soluciones enteras ya que se obtendría, respectivamente, $2^{z+1} = 616, 208 \text{ ó } 56$ ninguno de los cuales son potencias de 2. Finalmente, el caso (3) produce $2^{z+1} = 128$ de donde $z = 6$, con lo que $x = 59$ y $y = 12$.

9. Dada una cuerda PQ de una circunferencia y M el punto medio de la cuerda, sean AB y CD dos cuerdas que pasan por M. Se trazan AC y BD hasta cortar a PQ en los puntos X e Y respectivamente. Demostrar que X e Y equidistan de M.
(XVII Olimpiada Nacional de Matemática del Paraguay, Ronda Final - Nivel 3, 2005)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Consideremos la siguiente figura:



Trazamos desde X e Y las perpendiculares XE y YF a AB; y XG y YH a CD.

Tenemos entonces que los triángulos:

$$\overset{\Delta}{XEM} \approx \overset{\Delta}{YFM}$$
$$\overset{\Delta}{XEA} \approx \overset{\Delta}{YHD}$$
$$\overset{\Delta}{XGM} \approx \overset{\Delta}{YHM}$$
$$\overset{\Delta}{XGC} \approx \overset{\Delta}{YFB}$$

por ser todos rectángulos y tener un ángulo agudo igual. A partir de las semejanzas, podemos escribir:

$$\frac{MX}{MY} = \frac{XE}{YF} \quad (1) \qquad ; \qquad \frac{MX}{MY} = \frac{XG}{YH} \quad (2) \qquad ; \qquad \frac{XE}{YH} = \frac{AX}{YD} \quad (3)$$

$$\frac{XG}{YF} = \frac{XC}{YB} \quad (4)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$\frac{(MX)^2}{(MY)^2} = \frac{XE \cdot XG}{YF \cdot YH}$$

Y sustituyendo de acuerdo a (3) y (4) queda:

$$\frac{(MX)^2}{(MY)^2} = \frac{AX \cdot XC}{YD \cdot YB}$$

Pero: AX · XC = PX · QX y YD · YB = PY · QY. Entonces:

$$\frac{(MX)^2}{(MY)^2} = \frac{PX \cdot QX}{PY \cdot QY} \quad \Rightarrow \quad \frac{(MX)^2}{(MY)^2} = \frac{(PM + MX)(MX - PM)}{(MY - PM)(PM + MY)}$$

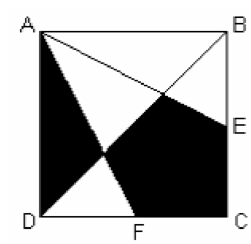
$$\frac{(MX)^2}{(MY)^2} = \frac{(MX)^2 - (PM)^2}{(MY)^2 - (PM)^2}$$

Restando las antecedentes entre si y los consecuentes entre sí, tenemos:

$$\frac{(MX)^2}{(MY)^2} = \frac{(PM)^2}{(PM)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{(MX)^2}{(MY)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad MX = MY$$

Con esto se completa la demostración.

10. En el cuadrado ABCD, el lado mide 10. E es el punto medio de BC y F es el punto medio de CD.

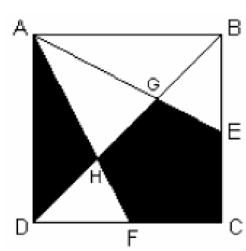


Hallar el área de la superficie pintada.

(XVII Olimpiada Nacional de Matemática del Paraguay, Ronda Final - Nivel 2, 2005)

SOLUCIÓN OFICIAL:

Consideremos la figura adjunta:



El área del triángulo ADF es:

$$(ADF) = \frac{10 \times 5}{2} = 25$$

Además: (ADF) = (ADH) + (DHF)

En los triángulos ADH y DHF tenemos (ADH) = 2 (DHF) por tener la misma altura y la base AD doble que la base DF. Entonces (ADF) = 3 (DHF)

$$\Rightarrow \qquad (\mathrm{DHF}) = \frac{1}{3}(\mathrm{ADF}) = \frac{1}{3} \times 25 = \frac{25}{3}$$

$$(\mathrm{ADH}) = (\mathrm{ADF}) - (\mathrm{DHF}) = 25 - \frac{25}{3} = \frac{50}{3}$$

En el triángulo ABE ocurre lo mismo, por lo tanto:

$$(\mathrm{BGE}) = \frac{25}{3}$$

El área pintada es:

$$(\mathrm{ADH}) + [(\mathrm{DBC}) - (\mathrm{DHF}) - (\mathrm{BGE})]$$

$$= \frac{50}{3} + \left[\frac{10 \times 10}{2} - \frac{25}{3} - \frac{25}{3}\right]$$

$$= \frac{50}{3} + 50 - \frac{50}{3}$$

$$= \mathbf{50}$$

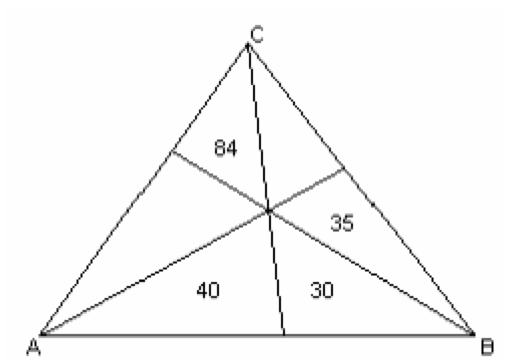
7. Olimpiadas alrededor del mundo.

Randall Godínez.
Arlene Martínez.
Melissa Ramírez.
Carlos Rodríguez.

En esta columna, a partir de esta edición, se propondrán únicamente problemas que hayan sido parte de exámenes de competencias olímpicas, nacionales o internacionales, con esto pretendemos que otros tipos de competencias sean abordados en la columna *Problemas de Competencias no Olímpicas* (antes denominada problemas propuestos) de esta misma revista.

Es importante hacer notar que los problemas de la OLCOMA que se publican en esta revista corresponden a lo que hoy se considera el nivel C de estas competencias olímpicas y que se hará referencia a otro nivel cuando ello sea necesario.

1. El triángulo ABC esta dividido en seis triángulos más pequeños por rectas que pasan por los vértices y por un punto común en el interior del triángulo. Las áreas de cuatro de estos triángulos están indicadas. Calcular el área del triángulo ABC.



(XV Olimpiada Nacional de Matemática**,** Ronda Final - Nivel 3, Paraguay, 2003)

2. En un cuadrado ABCD, E es el punto medio del lado BC. La recta AE corta a la recta DC en F y a la diagonal BD en G. Si el área (EFC) = 8, determinar el área (GBE).
(XV Olimpiada Nacional de Matemática**,** Ronda Final - Nivel 3, Paraguay, 2003)

3. Hallar todos los p primos positivos tales que $5^p + 4p^4$ es cuadrado perfecto.

(Olimpiada de Matemática del Uruguay, Instancia Final, Quinto Nivel, 29 de octubre de 2006)

4. Determinar todas las $f : R-\{0\} \to R$ que satisfacen la ecuación:

$$f(x)+8f\left(\frac{1}{x}\right)=-63x$$

(Olimpiada de Matemática del Uruguay, Instancia Final, Quinto Nivel, 29 de octubre de 2006)

5. Sean *a* y *b* enteros. Demostrar que la ecuación $(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$ admite a lo sumo una solución entera.

(XLI Olimpiada Matemática Española, Fase nacional 2005, Primera sesión, 21 de marzo)

6. Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones $f : Z \to Z$, tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x+f(y)) = f(x) - y.$$

(XL Olimpiada Matemática Española, Fase nacional 2004, Primera sesión, 26 de marzo)

7. Se consideran los enteros positivos

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006},$$

con $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Halle la última cifra del número

$$S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_9.$$

(VIII Olimpíada Matemática de Centroamérica y El Caribe, Panamá, 2006)

8. El país Olimpia está formado por n islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas que puedan transitarse en ambas direcciones de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
- Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla utilizando cada puente no más de una vez, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

Determine el número de maneras de construir los puentes.

(VIII Olimpíada Matemática de Centroamérica y El Caribe, Panamá, 2006)

9. ¿ Existen dos enteros positivos a y b tales que su suma sea 1995 y su producto sea un múltiplo de 1995 ?

(VII Olimpiada Nacional de Matemática, Chile, 1995)

10. Sea a un número entero positivo. Demuestre que la ecuación

$$x^2 - y^2 = a^3$$

siempre tiene soluciones x , y que son números enteros.

(VII Olimpiada Nacional de Matemática, Chile, 1995)

8. Lógica y Matemática Recreativa.

Maynor Castro

Carlos Molina

Mauricio Ramírez

Simón Sánchez

Erick Solano

En esta columna continuamos con la presentación de diez ejercicios que se han presentado en concursos de E.S.O de España.

Por otro lado, y al igual que en la edición anterior, al final de los enunciados damos una solución a los mismos esperando que sirvan como una guía aunque sabemos que se pueden encontrar otras vías de solución a cada uno de ellos.

Pues bien, empecemos y que se diviertan !!!

1º Juego (12-14 años): El rollo

Si mido un rollo de cuerda de dos en dos metros me sobra uno. si lo mido de tres en tres , me sobran dos, si lo mido de cuatro en cuatro me sobran tres, si lo hago de cinco en cinco me sobran cuatro y si de seis en seis me sobran cinco.
Sabiendo que tiene menos de 100 metros, ¿podrías decir su longitud?

(VII O.M. Primera Fase. Albacete. 1996)

2º Juego (12-14 años): El baile de la fiesta

A una fiesta acuden 22 personas. María baila con 7 chicos, Silvia con 8, Amaya con 9, y así sucesivamente hasta llegar a Carmen que baila con todos.
¿Cuántos chicos y chicas hay en la fiesta?

(III O.M. Fase Semifinal. Albacete. 1992)

3º Juego (12-14 años): Páginas del libro

Para numerar las páginas de un libro grande, hacen falta 3.005 dígitos.
¿Cuántas páginas tiene el libro?

(IV O.M. Primera Fase. Albacete. 1993)

4º Juego (12-14 años): Los armarios

En las escuelas superiores de EEUU, los estudiantes guardan sus pertenencias en armarios particulares durante el tiempo de clase. En una determinada escuela había 1.000 estudiantes y 1.000 armarios. Cada año el primer día de clase, los estudiantes se alinean por orden alfabético y realizan el extraño ritual que sigue: El primer estudiante abre todos los armarios. El segundo cierra los armarios pares comenzando por el dos. El tercero cambia la situación de cada tercer armario (abre los cerrados y cierra los abiertos). el cuarto cambia la situación de cada cuatro armarios; el quinto cambia cada quinto, etc.
¿Qué armarios se quedan abiertos cuando todos los estudiantes han terminado?

(III O.M. Primera Fase. Toledo. 2003)

5º Juego (12-14 años): Criptograma

Cada letra corresponde a un número distinto entre 0 y 9:

$$\mathbf{ZOO^2 = TOPAZ}$$

¿Sabrías calcular el valor de cada letra?

(X O.M. Primera Fase. Albacete. 1999)

6º Juego (14-16 años): Cogiendo monedas

Se colocan monedas en los vértices de un polígono regular. Dos jugadores cogen alternativamente una o dos monedas. En este último caso deben estar situadas en vértices consecutivos. Gana el que se lleva la última moneda.
¿Cuál es la estrategia ganadora?

(VIII O. M. Primera Fase. Albacete. 1997)

7º Juego (14-16 años): Leche manchada

Cuatro vasos, suficientemente grandes, contienen el mismo volumen de líquido. El primer vaso contiene café solo y los otros tres sólo tienen leche. Se vierte la cuarta parte del contenido del primer vaso en el segundo. Se hace la mezcla homogénea y, a continuación, se vierte la cuarta parte del contenido del segundo vaso en el tercero. Se hace la mezcla homogénea y se vierte la cuarta parte del contenido en el último vaso.

¿Cuál es la razón entre los volúmenes de café y leche en este cuarto vaso?

(XI O.M. Albacete. 2000)

8º Juego (14-16 años): Planeta X31

En el planeta X31 hay sólo dos tipos de billetes. Sin embargo el sistema no es tan malo porque hay solamente quince precios enteros que no se pueden pagar exactamente (se paga de más y se recibe cambio). Si 18 es uno de esos precios que no se pueden pagar exactamente, halla el valor de cada tipo de billete.

(IV O.M. de Mayo. Argentina. 1998)

9º Juego (14-16 años): 2002

Si escribimos todos los números enteros consecutivos, sin ninguna separación entre ellos, a partir del 1 y hasta el 2002, obtenemos un número de muchísimas cifras:

12345678910111213141516171819…………20012002

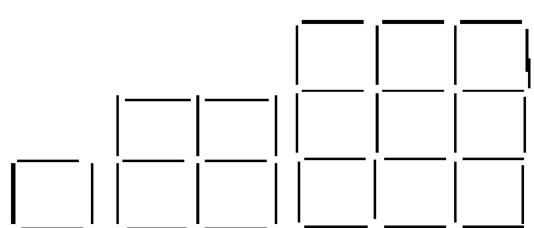
¿Cuántas cifras tiene ese número? Está claro que su primera cifra es un 1; también puedes ver que la cifra decimoquinta es un 2. ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar 2002?

En ambos casos explica tu razonamiento.

(I O.M. Provincial. Cuenca. 2002)

10º Juego (14-16 años): Cuadrado de cerillas

¿Cuántas cerillas se necesitan para construir N x N cuadrados unitarios formando otro cuadrado mayor, como la siguiente sucesión?



(I O.M. Provincial. Guadalajara. 2000)

SOLUCIONES PROPUESTAS

El rollo
59
Múltiplos de 2+1: 3, 5, 7, 9, ... 51, 53, 55, 57,59, 61, ...

" " 3+2: 5, 8, 11, 14, ... 50, 53, 56, 59, 62, ...

" " 4+3: 7, 11, 15, 19, ... 47, 51, 55, 599, 63, ...

" " 5+4: 9, 14, 19, 24, ... 44, 49, 54, 59, 64, ...

" " 6+5: 11, 17, 23, 24, ... 47, 53, 59, 65, ...

El m.c.m. de 2, 3, 4, 5 y 6 es 60, es decir, una unidad más que el número buscado.

El baile de la fiesta
8 chicos y 14 chicas.
1 + 7 = 8, 2 + 8 = 10, 3 + 9 = 12, ..., 8 +14 = 22.

Páginas del libro
1028 páginas.
3.005 - 9(9 primeras páginas) – 90 x 2(páginas 10 a la 99) – 900 x 3(páginas 100 a la 999) = 116.
116 : 4(dígitos a partir de 1.000) = 29
999 + 29 = 1.028

Los armarios
Los armarios que tienen un número que es un cuadrado perfecto.

Los cuadrados perfectos tienen un número impar de divisores y, por tanto, las sucesivas acciones de abrir y cerrar siempre dejarán los armarios abiertos

Criptograma
39.601

El número estará comprendido entre 100 y 311. Buscando los cuadrados perfectos que acaban en z = 1, 2, 3, la única posibilidad es para O = 9, luego 199^2 = 39.601.

Cogiendo monedas

La estrategia ganadora es que empiece el contrario.

En un triángulo, coja el adversario 1 ó 2 monedas, tú siempre puedes coger la última. En un cuadrado, si el otro coge una, tú coges la del vértice opuesto, de modo que ganas. Si coge dos monedas, tú coges las otras dos volviendo a ganar.

En un pentágono, si él coge dos monedas, tú coges la del vértice central de los tres que quedan con moneda, así que ganas. Si coge una moneda el adversario, tú coges las dos de los vértices que forman el lado opuesto al vértice cuya moneda ha cogido tu oponente; también ganas. La estrategia es que el otro empiece.

Leche manchada

Llamemos a la cantidad que contiene cada vaso "x".

Al verter la cuarta parte del primero al segundo, el segundo tendrá entonces 5x/4 l de mezcla, la proporción del café será x/4 l.

Al verter la cuarta parte del segundo en el tercero; el contenido del tercero será 21x/16 de la cual el contenido del café será x/16 l.

Vertemos la cuarta parte del tercero en el cuarto. El contenido del cuarto vaso será 85x/64 l. El contenido del café será de x/64 l.

La razón entre el café y la leche en el cuarto vaso será de uno de café por cada 84 de leche.

Planeta X31

Ha de haber como mínimo 1 billete impar, ya que si fueran los dos billetes pares, no se podría pagar ningún precio impar ni devolver.

Tampoco pueden ser los dos impares, ya que si fueran los dos impares el más pequeño sería el 5, con lo que el primer par sería el 10, con lo que habrían mas de 15 precios que no se podrían pagar.

Suponiendo que uno de los billetes sea 4, con lo que se podrían pagar un par si y un par no hasta a partir del doble del impar, desde donde se podrían pagar todos los precios pares. El otro precio, un impar:

El 5 no puede ser ya que se podría pagar 18: 5+5+4+4.

El 7 no puede ser ya que se podría pagar 18: 7+7+4.

El 9 no puede ser ya que se podría pagar 18: 9+9.

El 11 es, ya que no se puede completar 18, y hay 14 precios enteros más que no se pueden pagar: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 21, 25, 29.

El valor de los billetes existentes en el planeta X31 es de 4 y 11.

2002

¿Cuántas cifras tiene el número?

El número de cifras será igual a los 9 primeros dígitos + los números del 10 al 99 (ambos inclusive) * 2 + los números del 100 al 999 (ambos inclusive) * 3 + los números del 1000 al 2002 (ambos inclusive) * 4 = 6901 cifras.

¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar 2002?

La cifra 2002 formará parte de un número superior al 100 ya que este sólo llega hasta la 190. Con tal de facilitar el cálculo tomaremos como cifra la 2001.

Así podemos plantear la siguiente ecuación:

$$2001 = 9*1 + 90*2 + X$$

Aislando y operando, tenemos: X = 1812.

1812 es la posición de la cifra 2001 contando a partir de 100.

Esto significa que esta cifra será el último dígito del número 1812/3 = 604 contando a partir de 100.

El verdadero número será el 604 más los 99 números que tiene detrás = 703.

Así, la cifra que ocupa el lugar 2001 es el 3 del número 703, esto implica que la posición 2002 estará ocupada por la cifra 7 del número 704.

Cuadrado de cerillas

Dado un cuadrado de N x N cuadrados unitarios puedo escribir las siguientes igualdades:

nº de cerillas horizontales = N(N + 1)

nº de cerillas verticales = N(N + 1)

Así puedo afirmar que el total de cerillas necesarias en un cuadrado de dimensiones N x N es igual 2N(N + 1)

En nuestro país nos hemos quejado de las reformas educativas que ha sufrido nuestro sistema educativo, en especial en la enseñanza de la Matemática, así que para concluir con esta columna les contamos una anécdota con la cual podríamos preguntarnos ¿de quién obtenemos los modelos educativos que se implementan en nuestro país?

RE-REFORMA - UNIDAD LOGSE: EL PROBLEMA DE LAS PATATAS

El bachillerato español ha experimentado, en las tres últimas décadas, una evolución que puede quedar gráficamente reflejada en las diferentes formas de resolver un mismo problema matemático.

- ***Enseñanza 1960:*** Un campesino vende un saco de patatas por 1.000 pesetas. Sus gastos de producción se elevan a los 4/5 del precio de venta. ¿Cuál es su beneficio?
- ***Enseñanza tradicional 1970:*** Un campesino vende un saco de patatas por 1.000 pesetas. sus gastos de producción se elevan a los 4/5 del precio de venta, esto es, 800 pesetas. ¿Cuál es su beneficio ?
- ***Enseñanza moderna 1970 (LGE):*** Un campesino cambia un conjunto *P* de patatas por un conjunto *M* de monedas. El cardinal del conjunto *M* es igual a 1.000 pesetas, y cada elemento *P* de *M* vale una peseta. Dibuja 1.000 puntos gordos que representen los elementos del conjunto *M*. El conjunto *F* de los gastos de producción comprende 200 puntos gordos menos que el conjunto *M*. Representa el conjunto *F* como subconjunto del conjunto *M* y responde a la cuestión siguiente: ¿Cuál es el cardinal del conjunto *B* de los beneficios? Dibujar *B* en color rojo.

- ***Enseñanza renovada 1980:*** Un agricultor vende un saco de patatas por 1.000 pesetas. Los gastos de producción se elevan a 800 pesetas y el beneficio es de 200 pesetas. Subraya la palabra "patata" y discute sobre ella con tu compañero.
- ***Enseñanza reformada (LODE):*** Un labriego burgués, capitalista se ha enriquecido con 200 pesetas al vender especulando un saco de patatas. Analiza el texto y de seguido di lo que piensas en este abuso antidemocrático.
- ***Enseñanza comprensiva 7990 (LOGSE):*** (*Educación comprensiva es aquella que ofrece las mismas experiencias educativas a todos los alumnos. El aprendizaje ha de asegurar que los conocimientos adquiridos en el aula puedan ser utilizados en las circunstancias en que el alumno vive y en las que puede llegar a necesitarlos). Tras la entrada de España en el Mercado Común, los agricultores no pueden fijar libremente el precio de venta de las patatas. Suponiendo que quieran vender un saco de patatas por 1.000 pesetas., haz una encuesta para poder determinar el volumen de la demanda potencial de patatas en nuestro país y la opinión sobre la calidad de nuestras patatas en relación con las importadas de otros países, y cómo se vería afectado todo el proceso de venta si los sindicatos del campo convocan una huelga general. Completa esta actividad analizando los elementos del problema, relacionando los elementos entre sí y buscando el principio de relación de esos elementos. Finalmente, haz un cuadro de doble entrada, indicando en horizontal, arriba, los nombres de los grupos citados y, abajo, en vertical, diferentes formas de cocinar las patatas.