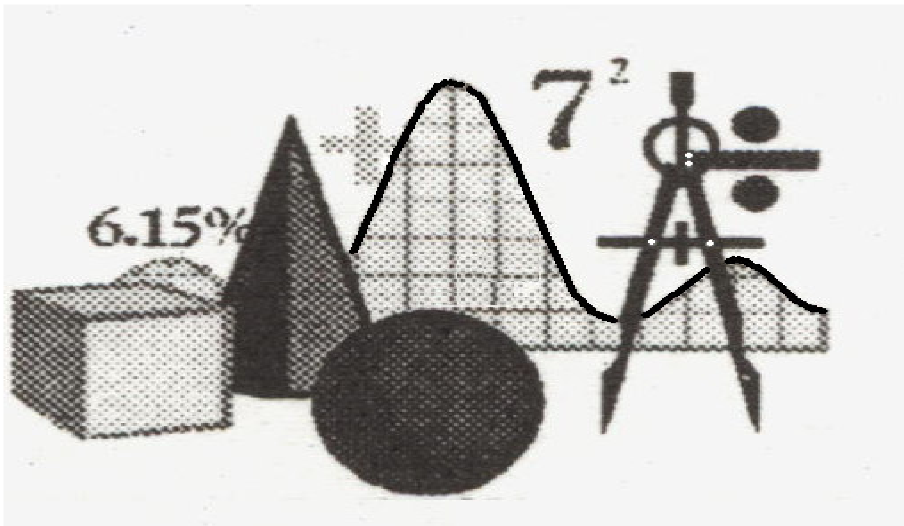


Sociedad Ramamsem

Problemas de Matemática para Competencias olímpicas

Elaborado por :

Miguel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

I TRIMESTRE DEL 2007

CONTENIDO

1. Presentación.

Esta publicación es realizada por la Sociedad RAMAMSEM y va dirigida a todas aquellas personas que deseen explorar una matemática diferente a la que se enseña en secundaria, y algo más!

Les recordamos que esta es una publicación trimestral y se distribuye de la siguiente manera:

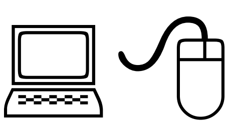
Revista Olímpica: Número de Volumen	Mes en que se envía
I	Enero
II	Abril
III	Julio
IV	Octubre

salvo por motivos de fuerza mayor, en cuyo caso ofrecemos desde ya disculpas, este calendario podrá verse afectado.

Aquellos lectores que aún no posean las ediciones anteriores y las desean pueden solicitarlas en forma individual a alguno de los correos citados al final de esta presentación (se solicita que se indique claramente cual o cuales de las publicaciones se desean)

Tengan presente que este material les llega de forma gratuita y que se deja a discreción el uso del mismo, pero requerimos que no se le dé un uso comercial puesto que ese no es el fin con que fue creada esta revista.

Toda comunicación o información con respecto a los problemas propuestos o soluciones, o en general, de esta revista pueden ser enviados a

 ramamsem@latinmail.com o bien ramamsem@costarricense.cr

2. Solución a los anteriores Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez

Giovanni Buckcanan Aguilar

Kendrick Mitchell Maturin

Mauricio Rodríguez Mata

A continuación brindamos la solución de los 30 Problemas de Competencias no Olímpicas de la edición anterior.

ÁLGEBRA.

1. Resuelva la siguiente ecuación: $\left(x^2-3x+1\right)^2-3\left(x^2-3x+1\right)+1=x.$

(Concurso Euclides, 1996)

SOLUCIÓN 1:

Desarrollando la expresión dada se tiene

$$x^4 + 9x^2 + 1 - 6x^3 + 2x^2 - 6x - 3x^2 + 9x - 3 + 1 = x$$

$$\Rightarrow x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$$

Factorizando la expresión anterior en dos factores cuadráticos de la forma

$$(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 1) = x^4 + (a + b)x^3 + abx^2 + (b - a)x - 1.$$

Aplicando identidad polinomial se tiene

$$a + b = -6$$

$$ab = 8$$

$$b - a = 2$$

al resolver el sistema de ecuaciones obtenido encontramos a = –4 y b = –2 con lo que la ecuación a resolver será

$$(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

cuyas soluciones son x = $2 \pm \sqrt{3}$ y x = $1 \pm \sqrt{3}$.

SOLUCIÓN 2:

Rescribamos la ecuación original de la siguiente manera

$$\left(x^2-3x+1\right)^2-2\left(x^2-3x+1\right)+1-\left(x^2-3x+1\right)=x.$$

de donde se tiene

$$\left(x^2-3x+1\right)^2-2\left(x^2-3x+1\right)+1=x^2-3x+1+x.$$

$$\Rightarrow \left[\left(x^2-3x+1\right)-1\right]^2=x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow \left(x^2-3x\right)^2=(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \left(x^2-3x\right)^2-(x-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \left[\left(x^2-3x\right)+(x-1)\right]\left[\left(x^2-3x\right)-(x-1)\right]=0$$

$$\Rightarrow \left(x^2-2x-1\right)\left(x^2-4x+1\right)=0$$

cuyas soluciones son x = $2\pm\sqrt{3}$ y x = $1\pm\sqrt{3}.$

2. Si x y y son números reales tales que $x+y=1,\ x^3+y^3=4$ determine

a) x^2+y^2;

b) x^5+y^5.

(J.I.R M[C] Knight Problems Contest, 1993)

SOLUCIÓN:

a) De $x+y=1$ se obtiene, elevando al cuadrado, $x^2+2xy+y^2=1$ (1) pero como $x^3+y^3=1$ entonces $(x+y)(x^2-xy+y^2)=4$ esto es $x^2-xy+y^2=4$ (2) de donde, restando (2) de (1), $3xy=-3 \Rightarrow xy=-1$ con lo que $x^2+1+y^2=4 \Rightarrow x^2+y^2=3.$

b) $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=3\cdot 4 \Rightarrow x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5=12 \Rightarrow x^5+y^5+x^2y^2(y+x)=12 \Rightarrow$ $x^5+y^5+(-1)^2(1)=12 \Rightarrow x^5+y^5+1=12 \Rightarrow x^5+y^5=11.$

3. Hallar todos los números no negativos x, y, z tales que

$$z^x = y^{2x},$$
$$2^z = 2 \cdot 4^x,$$
$$x + y + z = 16.$$

(Concours de Mathématiques des Maritimes, 1999)

SOLUCIÓN:

Notemos que $x,\ y,\ z \geq 0.$

Con $x = 0,\ 2^z = 2 \cdot 4^0 = 0,$ obteniéndose $z = 1$ y $y = 15,$ como una solución.

Así que supondremos, ahora, que $x > 0.$ Entonces $z^x = y^{2x}$ implica (con $z,\ y \geq 0$) $z = y^2,$ y $y = \sqrt{z}$. De $2^x = 2 \cdot 4^x = 2^{2x+1}$ tenemos que $z = 2x + 1$ y $y^2 = 2x + 1$. Ahora, de $x + y + z = 16$ tenemos

$$\frac{y^2 - 1}{2} + y + y^2 = 16,$$

o equivalentemente, $3y^2 + 2y - 33 = 0 \Rightarrow (3y + 11)(y - 3) = 0 \Rightarrow y = \frac{-11}{3}\ ó\ y = 3$, desde que $y \geq 0$ entonces $y = 3,\ z = y^2 = 9,\ x = 4.$ Así, las dos únicas soluciones son (0, 15, 1) y (4, 3, 9).

4. Determine todos los números reales *a* para el cual la ecuación $a \cdot 3^x + 3^{-x} = 3$ posee una única solución real.

(Finnish High School Mathematics Contest, 1997)

SOLUCIÓN:

La ecuación dada es equivalente a $a \cdot (3^x)^2 - 3(3^x) + 1 = 0$ siendo una ecuación cuadrática en 3^x ésta tendrá una única raíz si y solo sí $\Delta = (-3)^2 - 4(a)(1) = 0 \Rightarrow 9 - 4a = 0$ con lo que $a = \frac{9}{4}.$

5. Resolver para x: $(\log_2 x)\left(\log_2 x^2\right) - \log_2 x^3 - 9 = 0.$

(J.I.R M[C] Knight Problems Contest, 1995)

SOLUCIÓN:

$$(\log_2 x)\left(\log_2 x^2\right) - \log_2 x^3 - 9 = 0 \Rightarrow (\log_2 x)\left(\log_2 x^2\right) - \log_2 x^3 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 9 = 0 \Rightarrow (2\log_2 x + 3)(\log_2 x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\log_2 x + 3 = 0 \\ \log_2 x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = -\dfrac{3}{2} \\ \log_2 x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{-\frac{3}{2}} \\ x = 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ x = 8 \end{cases}$$

6. Si $60^a = 3$ y $60^b = 5$ calcule entonces $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$.

(J.I.R M[C] Knight Problems Contest, 1996)

SOLUCIÓN 1:

$$\begin{cases} 60^a = 3 \\ 60^b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{60} 3 = a \\ \log_{60} 5 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a - b = \log_{60} 60 - \log_{60} 3 - \log_{60} 5 = \log_{60} 4 \\ 2(1-b) = 2(\log_{60} 60 - \log_{60} 5) = 2\log_{60} 12 = \log_{60} 144 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1-a-b}{2(1-b)} = \frac{\log_{60} 4}{\log_{60} 144} = \log_{144} 4 = \log_{12} 2 \Rightarrow 12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 12^{\log_{12} 2} = 2.$$

NOTA: Hemos utilizado las siguientes propiedades:

$$1 = \log_a a \qquad \log_a x + \log_a y = \log_a (xy) \qquad \log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x \qquad a^{\log_a x} = x$$

SOLUCIÓN 2:

Notemos que $12 = \frac{60}{5} = \frac{60}{60^b} = 60^{1-b}$ esto es $60 = 12^{\frac{1}{1-b}}$ con lo que se tiene

$$60^{\frac{1-a-b}{2}} = \left(12^{\frac{1}{1-b}}\right)^{\frac{1-a-b}{2}} = 12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$$

pero

$$60^{\frac{1-a-b}{2}} = \left(60^{1-a-b}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(60^{1} \times 60^{-a} \times 60^{-b}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(60 \times 3^{-1} \times 5^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

con lo que se concluye

$$12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 2.$$

7. Si $x^2 + xy + x = 14$ y $y^2 + xy + y = 28$, determine entonces el valor numérico de x + y. (Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 2000)

SOLUCIÓN:

Sumando las dos ecuaciones se tiene

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 42\ ;$$

esto es,

$$(x+y)^2 + (x+y) - 42 = 0$$
$$(x+y-6)(x+y+7) = 0$$

Así, $x + y = 6$ o bien $x + y = -7$.

8. Dado que $x^2 + y^2 = 28$ y $xy = 14$, encuentre el valor de $x^2 - y^2$.
(Junior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda final, 2000)

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 28 \\ xy = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 28 \\ 2xy = 28 \end{cases}$$ restando ambas ecuaciones se obtiene $x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$ por lo tanto $x^2 - y^2 = 0.$

9. Sea S = 1 + 2+ 3 + …+ 10^n. ¿Cuántos factores 2 aparecen en la factorización prima de S?
(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

SOLUCIÓN:

Tenemos que $S = \dfrac{10^n\left(10^n + 1\right)}{2} = 2^{n-1} \cdot 5^n\left(10^n + 1\right)$ así que el número de factores 2 que aparecen en la factorización prima de S es $n - 1$.

10. Sean a, b, c y d las raíces de $x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 148x - 160 = 0$.
Determine el valor de $\dfrac{1}{abc} + \dfrac{1}{abd} + \dfrac{1}{acd} + \dfrac{1}{bcd}$.
(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

SOLUCIÓN:

Tenemos que, por las fórmulas de Viêta, $a + b + c + d = 8$ mientras que $abcd = -160$.
Así, la expresión dada es equivalente a $\dfrac{a + b + c + d}{abcd} = -\dfrac{1}{20}$.

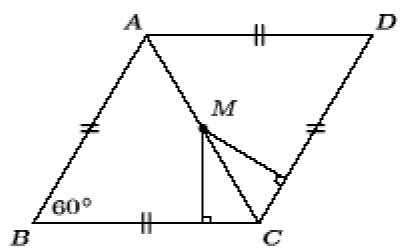
GEOMETRÍA.

1. Un rombo es un paralelogramo con todos sus cuatro lados de igual longitud. Si uno de los ángulos internos de un rombo mide 60°, halle la razón del área del rombo y la del círculo inscrito en él.

(Concours de Mathématiques des Maritimes, 1999)

SOLUCIÓN:

Sea $\angle$ ABC = 60° entonces $\angle$ CDA = 60°. Trazamos la diagonal AC. Entonces $\angle$ BAC = $\angle$ BCA = $\angle$ DAC = $\angle$ DCA = 60°.



Sea M el punto medio de AC. Ahora, las distancias perpendiculares de M a BC, de M a CD, de M a AD y de M a AB son iguales a $\frac{1}{2}$AB sen $60°$, este es el radio del círculo inscrito.

El área del círculo inscrito es $\pi\left(\frac{1}{2}AB\, sen\, 60^\circ\right)^2$. Así

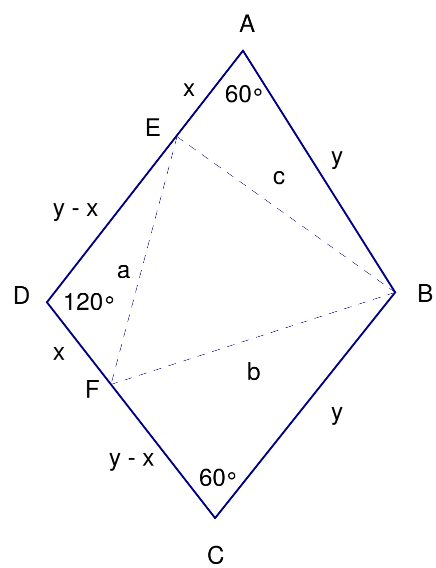
$$\frac{\text{área del rombo}}{\text{área del círculo inscrito}} = \frac{AB^2\ sen\, 60^\circ}{\pi\left(\frac{1}{2}\ sen\, 60^\circ\right)^2} = \frac{4}{\pi\ sen\, 60^\circ} = \frac{8}{\pi\sqrt{3}}.$$

2. Sea ABCD un rombo tal que ∠ DAB = 60°. El punto E está sobre AD y el punto F está sobre DC tal que AE = DF. Pruebe que el triángulo Δ BEF es equilátero.

(J.I.R M^C Knight Problems Contest, 1995)

SOLUCIÓN:

Consideremos la figura siguiente y los datos que en ella se encuentran:

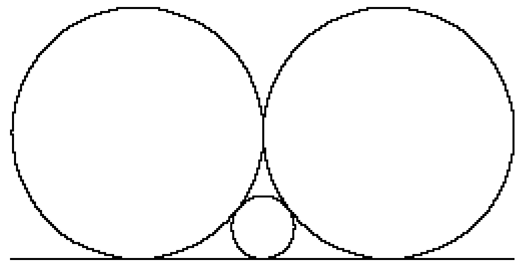


aplicando el teorema de cosenos a los triángulos AEB, EDF y FCB respectivamente se obtiene

$$
\begin{cases}
c^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ \\
a^2 = x^2 + (y-x)^2 - 2x(y-x)\cos 60^\circ \\
b^2 = y^2 + (y-x)^2 - 2y(y-x)\cos 60^\circ
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
c^2 = x^2 + y^2 - xy \\
a^2 = x^2 + y^2 - xy \\
b^2 = x^2 + y^2 - xy
\end{cases}
$$

de donde resulta claro que $a = b = c$ por lo que el triángulo Δ BEF es equilátero.

3. Dos círculos, cada uno de radio 10, son colocados sobre una recta de modo que sean tangentes entre ellos y a la recta. Uno círculo menor es dibujado entre ellos de modo que éste es tangente a los dos círculos y la recta. Determine el radio del menor círculo.

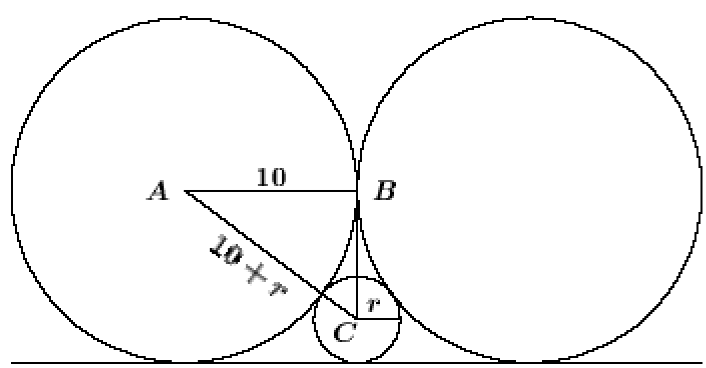


(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 2000)

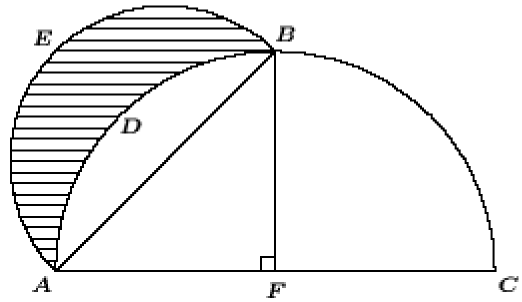
SOLUCIÓN:

Sean A el centro de uno de los círculos mayores, B el punto de contacto entre los dos círculos mayores y C el centro del círculo menor. Entonces $AB \perp BC$, $AC = 10 + r$ y $BC = 10 - r$. Del teorema de Pitágoras tenemos

$$\begin{aligned}(10+r)^2 &= 10^2 + (10-r)^2\,,\\ 100 + 20r + r^2 &= 100 + 100 - 20r + r^2\,,\\ 40r &= 100\,,\\ r &= 2.5\,.\end{aligned}$$



4. En la figura adjunta ABC y AEB son semicírculos y F es el punto medio de AC y AF = 1 cm. Halle el área de la región destacada.



(Old Mutual Mathematical Contest, Final Paper 1, 1991)

SOLUCIÓN:

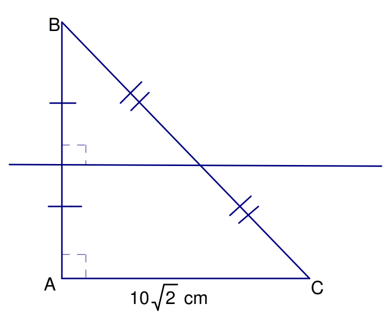
AB es el diámetro del semicírculo AEB y la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles AFB, así AB = $\sqrt{2},$ y el área del semicírculo es $\frac{\pi}{4}$. Ahora, el semicírculo ABC tiene área $\frac{\pi}{2}$, mientras que el triángulo rectángulo AFB tiene área $\frac{1}{2}$. El área del segmento circular ADB es $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, y el área destacada es $\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

5. En el triángulo ABC, AB = AC. La bisectriz perpendicular de AB contiene al punto medio de BC. Si la longitud de AC es $10\sqrt{2}$ cm, halle el área del triángulo Δ ABC.

(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

SOLUCIÓN:

El segmento que une los puntos medios de AB y BC es paralelo a AC entonces $\angle$CAB = 90° y el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}=100\,cm^2$.



6. Las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo son enteros positivos. El área del triángulo es 120. Determine la longitud de la hipotenusa.
(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

SOLUCIÓN:

Sean a y b (consideremos a < b sin pérdida de generalidad), las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y c la longitud de la hipotenusa entonces ab = 240 y $a^2 + b^2 = c^2$.

Como estos catetos son números enteros entonces, mediante algunos cálculos numéricos, podemos construir la siguiente tabla de valores

a	b	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	c^2	c
1	240	1	57600	57601	57601	240,0020833...
2	120	4	14400	14404	14404	120,0166655...
3	80	9	6400	6409	6409	80,05623024...
4	60	16	3600	3616	3616	60,13318551...
5	48	25	2304	2329	2329	48,25971405...
6	40	36	1600	1636	1636	40,44749683...
8	30	64	900	964	964	31,04834939...
10	24	100	576	676	676	26
12	20	144	400	544	544	23,32380758...
15	16	225	256	481	481	21,9317122...

con lo que resulta claro que las longitudes que cumplen las condiciones del enunciado son 10, 24 y 26 por lo que la longitud de la hipotenusa es 26.

7. Los lados de un triángulo son 4, 13 y 15. Determine la medida del radio del círculo inscrito.
(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1998)

SOLUCIÓN:

Sean A, B, C los vértices del triángulo. El área del triángulo Δ ABC es, por la formula de Herón, $\sqrt{16(12)(3)(1)} = 24$.

Sea O el centro del círculo inscrito y r su radio. Así,

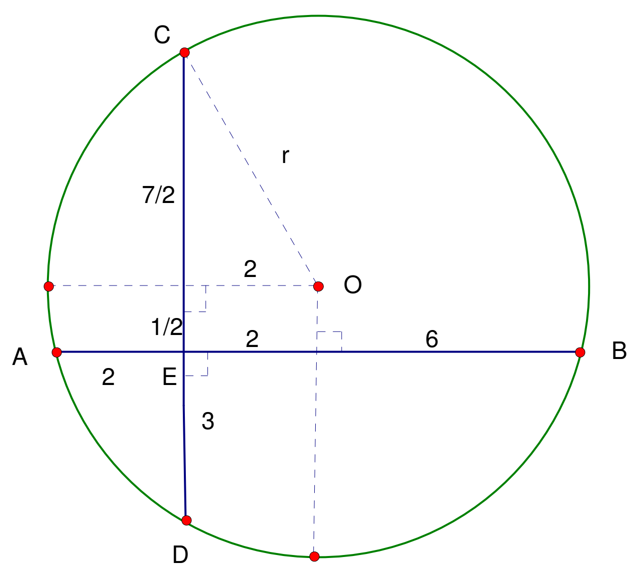
$$\begin{aligned} 24 &= \text{área del } \Delta\,AOB + \text{área del } \Delta\,BOC + \text{área del } \Delta\,AOC \\ &= 0{,}5r\,(AB) + 0{,}5r\,(BC) + 0{,}5r\,(AC) \\ &= 0{,}5r\,(4 + 13 + 15) = 16\,r \end{aligned}$$

de donde se obtiene r = 1,5.

8. Dos cuerdas de un círculo AB y CD se intersecan en ángulo recto en E de modo que AE = 2, EB = 6 y DE = 3. Determine el área del círculo.
(J.I.R M[C] Knight Problems Contest, 1998)

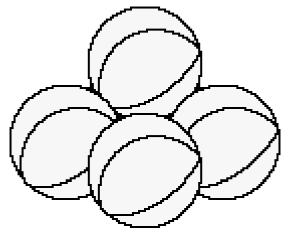
SOLUCIÓN:

Consideremos la siguiente figura



De acuerdo con los datos de ésta se tiene $\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2^2 = r^2$ con lo cual $r = \frac{\sqrt{65}}{2}$ y el área buscada será $\frac{65\pi}{4}$.

9. Cuatro balones de basket son colocados en el piso de un gimnasio formando un cuadrado con cada balón tangente a los otros tres. Un quinto balón es colocado sobre estos cuatro balones de modo que también es tangente a ellos, como se indica en la figura:

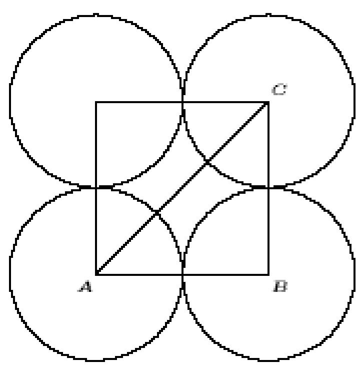


Si el diámetro de un balón de basket es de 25 cm, determine la altura, en centímetros, del centro del quinto balón de basket al piso del gimnasio.

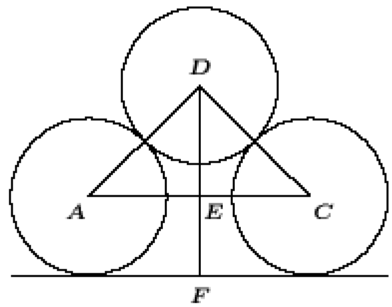
(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 1998)

SOLUCIÓN:

Primero observemos los cuatro balones de basket cuando yacen sobre el suelo:



Hallamos que $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25\sqrt{2}$. Ahora, para hallar la altura del centro del quinto balón de basket al piso del gimnasio analicemos la sección cruzada de la pirámide por un plano vertical pasando por A y C:



La altura $DF = DE + EF$, donde $EF = \frac{25}{2}$ y $DE = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \frac{25}{2}\sqrt{2}.$ Así, $DF = \frac{25}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right).$

10. Las longitudes de los lados de un triángulo son b + 1, 7 – b y 4b – 2. Determine el número de valores de b para los cuales el triángulo es isósceles.
(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 1998)

SOLUCIÓN:

Potencialmente, tenemos tres posibilidades para el triángulo al ser este isósceles:

(1) b + 1 = 7 – b

(2) b + 1 = 4b – 2

(3) 7 – b = 4b – 2

La primera ecuación nos da b = 3, consecuentemente 4, 4 y 10 son posibles longitudes de los lados del triángulo. La segunda ecuación nos da b = 1, consecuentemente 2, 2 y 6 son posibles longitudes de los lados del triángulo. Finalmente, la tercera ecuación nos da b = $\frac{9}{5}$, consecuentemente $\frac{14}{5}$, $\frac{26}{5}$ y $\frac{26}{5}$ son posibles longitudes de los lados del triángulo. Ahora bien, por la desigualdad triangular se tiene que las longitudes del triángulo buscado son $\frac{14}{5}$, $\frac{26}{5}$ y $\frac{26}{5}$ por lo que b = $\frac{9}{5}$ es la única posibilidad.

TEORÍA DE NÚMEROS.

1. A y B son enteros positivos. La suma de los dígitos de A es 19. La suma de los dígitos de B es 99.Determine el menor valor posible de la suma de los dígitos del número A + B.
(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1999)

SOLUCIÓN:

Debe resultar claro que para obtener el menor valor posible de la suma de los dígitos del número A + B debe suceder que, por ejemplo, A = 9900000000001 y B = 99999999999 (o bien, viceversa). Así A + B = 10000000000000 por lo que la suma de los dígitos de A + B es 1.

2. Halle la cantidad de números positivos de dos dígitos tales que la diferencia entre él y el producto de sus dígitos sea 12.
(The Alberta High School Mathematics Competition, I parte, 1999)

SOLUCIÓN:

Sean los dos dígitos a y b respectivamente.

De $10a + b - ab = 12$, tenemos $(a - 1)(10 - b) = 2$. Así, se obtiene que los números positivos de dos dígitos que satisfacen la condición enunciada son 28 ó 39 por lo que la cantidad de números es 2.

3. Ordene ascendentemente los siguientes números: 2^{55555} ; 3^{33333} ; 6^{22222}.
(Junior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 2000)

SOLUCIÓN:

Notemos primero que

$$2^{55555} = (2^5)^{11111} = 32^{11111}$$
$$3^{33333} = (3^3)^{11111} = 27^{11111}$$
$$6^{22222} = (6^2)^{11111} = 36^{11111}$$

desde que $27 < 32 < 36$, entonces $27^{11111} < 32^{11111} < 36^{11111}$, con lo cual $3^{33333} < 2^{55555} < 6^{22222}$

4. Un cierto número N consiste de tres dígitos los cuales son términos consecutivos de una progresión aritmética. Si N es dividido por la suma de sus dígitos el cociente es 48. También, si 198 es sustraído de N, el resultado es un número que posee los mismos dígitos que N pero en orden inverso. Determine N.
(J.I.R M^C Knight Problems Contest, 1997)

SOLUCIÓN:

Sea $N = 100a + 10b + c,$ como los dígitos de N son términos de una progresión aritmética entonces, para algún d, $N = 100(b-d) + 10b + b + 10 = 111b - 99d.$ Por otro lado, de acuerdo con la segunda parte del enunciado tenemos que $N = 3b \cdot 48$ de donde $111b - 99d = 3b \cdot 48$ con lo que $b = -3d.$ Ahora bien, de la parte final del enunciado se tiene $N - 198 = 100c + 10b + a$ o equivalentemente $111b - 99d - 198 = 111b + 99d \Rightarrow -198 = 198d \Rightarrow d = -1 \wedge b = 3$ por lo tanto

$$N = 432.$$

5. La suma de los primeros tres términos de una progresión geométrica es 37 y la suma de sus cuadrados es 481. Determine los primeros tres términos de esa progresión.
(J.I.R M^C Knight Problems Contest, 1997)

SOLUCIÓN:

Sean a, ar y ar^2 los tres términos de la progresión entonces

$$\begin{cases} a + ar + ar^2 = 37 & (1) \\ a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 481 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1 + r + r^2) = 37 \\ a^2(1 + r^2 + r^4) = 481 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(1 + r + r^2)(1 - r) = 37(1 - r) & (3) \\ a^2(1 + r^2 + r^4)(1 - r^2) = 481(1 - r^2) & (4) \end{cases}$$

dividiendo la ecuación (3) y (4) y simplificando al máximo obtenemos $a - ar + ar^2 = 13$ que al restar este resultado de (1) se obtiene $2ar = 24$ con lo que $a = \frac{12}{r}$. Sustituyendo este último resultado en (1) obtenemos $\frac{12}{r} + \frac{12}{r} \cdot r + \frac{12}{r} \cdot r^2 = 37$ que al resolverla nos permite obtener $r = \frac{4}{3} \vee r = \frac{3}{4}$. Ahora bien, si $r = \frac{4}{3}$ entonces $a = 9$ y los tres términos buscados son 9, 12 y 16. Por otro lado, si $r = \frac{3}{4}$ entonces $a = 16$ y los tres términos buscados son 16, 12 y 9.

FUNCIONES O SUCESIONES.

1. Dado que f(x + y) + f(x – y) = 2f(x) cos y, f(0) = a, y f(π/2) = b. Determine f(t).

(J.I.R. M^c Knight Problems Contest, 1997)

SOLUCIÓN:

Haciendo $y = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x + \frac{\pi}{2}) + f(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

$$\Rightarrow f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

sustituyendo $x = m + \frac{\pi}{2}$ *en* (1) *se tiene*

$$f(m+\pi) = -f(m) \quad (2)$$

sustituyendo $\quad m = t + \pi$ *en* (2) *se tiene*

$$f(t + 2\pi) = -f(t + \pi)$$

$$\Rightarrow f(t + 2\pi) = -f(t + \pi) = -[-f(t)] = f(t)$$

$$\Rightarrow f(t + 2\pi) = f(t) \quad (3)$$

Lo cual nos indica que la función es periódica (de período 2π)

sustituyendo $\quad x = m - \pi$ *en* (2) *se tiene*

$$f(m) = -f(m - \pi)$$

$$\Rightarrow f(m - \pi) = -f(m)$$

con lo que $\quad f(m + \pi) = -f(m) = f(m - \pi) \quad (4)$

sustituyendo $\quad x = 0, y = t$ *se obtiene*

$$f(t) + f(-t) = 2a\cos(t) \quad (5)$$

sustituyendo $\quad x = \frac{\pi}{2}, y = t$ *se obtiene*

$$f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 2b\cos(t) \quad (6)$$

En (6) hacemos la sustitución $t \rightarrow t + \frac{\pi}{2}$ con lo que

$$f(t+\pi)+f(-t)=2b\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(t+\pi)+f(-t)=-2b\,sen(t) \qquad (7)$$

aplicando (2) *en* (7) *se obtiene*

$$-f(t)+f(-t)=-2b\,sen(t) \qquad (8)$$

efectuando $(5)-(8)$ *se obtiene*

$$2f(t)=2a\cos(t)+2b\,sen(t)$$

$$\Rightarrow f(t)=a\cos(t)+bsen(t)$$

2. Pruebe que la función:

$$f(x) = \sqrt{x-4\sqrt{x-1}+3} + \sqrt{x-6\sqrt{x-1}+8}$$

es constante en el intervalo cerrado 5 $\leq$ x $\leq$ 10.
(CEOC, 2001).

SOLUCIÓN:

Notemos que $x-4\sqrt{x-1}+3=\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2$ y $x-6\sqrt{x-1}+8=\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2$ con lo que

$$f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}$$

de donde se obtiene

$$f(x)=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|$$

como $5 \le x \le 10$ entonces $\left|\sqrt{x-1}-2\right| = \sqrt{x-1}-2$ y $\left|\sqrt{x-1}-3\right| = 3-\sqrt{x-1}$ por lo que $f(x)=1$ y es claro que la función es constante.

3. Determine todos los términos de la sucesión $a_n = 3^{2n-1} + 2^{n-1}$ tales que sean cuadrados para cualquier entero positivo *n*.

(Memorial University Undergraduate Mathematics Competition, 1997)

SOLUCIÓN:

Tenemos que $a_1 = 4$ y $a_2 = 29$. Para $n \ge 3$, $3^{2n-1} \equiv 3(mód\ 4)$ y $2n-1 \equiv 0(mód\ 4)$. Así, $a_n \equiv 3(mód\ 4)$. Pero un entero positivo es un cuadrado perfecto si y solo si es congruente con 0 ó 1 en módulo 4. Por tanto, $a_1 = 4$ es el único cuadrado de la sucesión.

4. La sucesión de números …, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3 , … está definida por $a_n - (n+1)a_{2-n} = (n+3)^2$, para todo entero *n*. Calcule a_0 .

(Canadian Open Mathematics Challenge, 2000)

SOLUCIÓN:

Usando la sucesión por recurrencia dada tenemos

$$a_0 - a_2 = 9 \quad \text{para } n = 0$$
$$a_2 - 3a_0 = 25 \quad \text{para } n = 2$$

sumando la primera ecuación con la segunda se obtiene $-2a_0 = 34$, así $a_0 = -17$

5. Una función f(x) tiene las siguientes propiedades:

   a. f(1) = 1
   b. f(2*x*) = 4f(*x*) + 6
   c. f(*x* + 2) = f(*x*) + 12*x* + 12

   Calcule f(6).

(Canadian Open Mathematics Challenge, 2004)

SOLUCIÓN 1:

Usando la propiedad b. con x = 1, f(2) = 4f(1) + 6 = 4(1) + 6 = 10 siendo f(1) = 1 por la propiedad a.

Usando la propiedad b. con $x = 2$, $f(4) = 4f(2) + 6 = 4(10) + 6 = 46$.

Usando la propiedad c. con $x = 4$, $f(6) = f(4) + 12(4) + 12 = 46 + 48 + 12 = 106$.

Así, el valor de $f(6)$ es 106.

SOLUCIÓN 2:

Usando la propiedad c. con $x = 1$, $f(3) = f(1) + 12(1) + 12 = 1 + 12 + 12 = 25$ siendo $f(1) = 1$ por la propiedad a.

Usando la propiedad b. con $x = 3$, $f(6) = 4f(3) + 6 = 4(25) + 6 = 106$.

Así, el valor de $f(6)$ es 106.

SOLUCIÓN 3:

Trabajando un poco se tiene

$$\begin{aligned} f(6) &= 4f(3) + 6; && \text{por la propiedad b. con } x = 3. \\ &= 4\,[\, f(1) + 12(1) + 12] + 6; && \text{por la propiedad c. con } x = 1. \\ &= 4f(1) + 4(24) + 6 \\ &= 4(1) + 102; && \text{por la propiedad a.} \end{aligned}$$

Así, el valor de $f(6)$ es 106.

3. Problemas de Competencias no Olímpicas.

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna consistirá en 30 ejercicios propuestos que se separarán por categorías (Álgebra, Geometría, Teoría de Números y Funciones o Sucesiones) y de menor a mayor nivel de dificultad. Es importante destacar que el ***nivel de dificultad*** en que se ordenarán los ejercicios de cada categoría es valorado por nosotros (los editores) de acuerdo a criterios establecidos pero ello no significa que esta valoración pueda ser diferente para el estimable lector.

De hecho, sus comentarios al respecto nos permitirán hacer una valoración de los mismos para ediciones futuras.

Por otro lado, la solución de los mismos se presentará hasta la próxima edición con la finalidad de que nuestros lectores participen activamente enviándonos soluciones y / o comentarios que puedan enriquecer la discusión de cada ejercicio. Sin embargo, de no darse esa participación en algunos ejercicios, se publicará, al menos, una solución oficial brindada por los encargados de esta sección.

ÁLGEBRA.

1. Determine todas las soluciones reales de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{17+8x-2x^2}+\sqrt{4+12x-3x^2}=x^2-4x+13.$$

(CEOC, 1995)

2. (a) Resuelva: $\sqrt{x+20}-\sqrt{x+1}=1.$

   (b) Resuelva: $\sqrt[3]{x+20}-\sqrt[3]{x+1=1.}$

(Canadian Mathematical Society Prize Exam, Abril 26, 1996)

3. Determine las cuatro raíces de la ecuación: $x^4+16x-12=0.$

(Another Five Klamkin Quickies, Octubre 21, 1996)

4. ¿Cuántos pares de enteros positivos satisfacen la ecuación

$$\frac{x}{19}+\frac{y}{95} = 1?$$

(The Twelfth W.J. Blundon Contest, Febrero 22, 1995)

5. Determine todas las soluciones (x, y) para el sistema de ecuaciones:

$$x+y+\frac{x}{y}=19$$

$$\frac{x(x+y)}{y}=60.$$

(The Twelfth W.J. Blundon Contest, Febrero 22, 1995)

6. Determine todas las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

(CEOC, 1996)

7. Suponga que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si, para todo $x \in [-1, 1]$, $\left|ax^2 + bx + c\right| \leq 1$, pruebe que

$$|cx^2 + bx + a| \leq 2.$$

(CEOC, 1996)

8. Determine todos los enteros que satisfacen la siguiente ecuación:

$$2^x \cdot (4 - x) = 2x + 4.$$

(Mathematical Team Contest, Baltic Way, Vilnius, November 5 – 8, 1992)

9. Determine todas las soluciones enteras de la ecuación

$$2(x + y) + xy = x^2 + y^2,$$

con $x > 0,\ y > 0.$

(CEOC, 1996)

10. Suponga que $a \neq 0$ y $c \neq 0$, y que $ax^3 + bx + c$ tiene un factor de la forma $x^2 + px + 1.$

Pruebe que $a^2 - c^2 = ab.$

(CEOC, 1996)

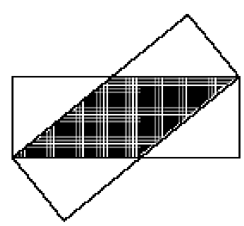
GEOMETRÍA.

1. La suma de los ángulos de un polígono de n lados es menor que n^2. Determine el menor valor de n que satisface dicha condición.
(Alberta High School Mathematics Competition, Noviembre 21, 1995)

2. $ABCD$ es un cuadrado. Tres segmentos paralelos l_1, l_2, l_3 pasan por los vértices A, B, C respectivamente. Las distancias entre l_1 y l_2 es 5 y la distancia entre l_2 y l_3 es 7. Determine le área de $ABCD$.
(The Eleventh W.J. Blundon Contest, Febrero 23, 1994)

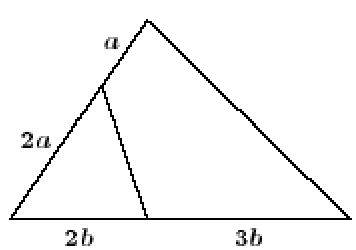
3. La suma de las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo es 18. La suma de los cuadrados de esas longitudes es 128. Determine el área de ese triángulo.
(The Eleventh W.J. Blundon Contest, Febrero 23, 1994)

4. Dos rectángulos congruentes con medidas 3 cm $\times$ 7 cm son colocados como indica la figura.



Determine el área común a ambos.
(Senior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda preliminar, 2000)

5. El área del menor triángulo en la figura es 8 unidades cuadradas. Determine el área del triángulo mayor.



(Junior High School Mathematics Contest, Columbia Británica, ronda final, 1998)

6. ABCD es un cuadrado cuyo lado tiene longitud s. Un círculo, centrado en A y radio r, es trazado de modo que el arco de este círculo que se localiza en el interior del cuadrado divide al cuadrado en dos regiones con igual área. Exprese r en términos de s.
(Saskatchewan Senior Mathematics Contest, Febrero 22, 1995)

7. Tres círculos pasan por el origen de coordenadas. El centro del primer círculo está en el primer cuadrante, el centro del segundo círculo está en el segundo cuadrante y el centro del tercer círculo está en el tercer cuadrante. Si P es cualquier punto que está en el interior de los tres círculos, pruebe que P está en el segundo cuadrante.
(The Manitoba Mathematical Contest, para estudiantes de grado12, Febrero 22, 1995)

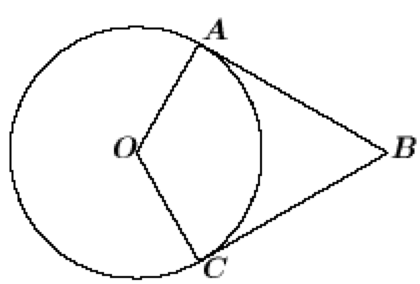
8. Suponga que a, b, c son las longitudes de los tres lados de un triángulo con semiperímetro s y área Δ. Pruebe que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{s}{\Delta}.$$

(CEOC, 1996)

9. El área total de un cilindro circular recto es numéricamente igual al doble de su volumen. Determine las medidas del radio y la altura del cilindro sabiendo que ambas son enteras.
(Memorial University Undergraduate Mathematics Competition, Septiembre 25, 1997)

10. El triángulo ABC es equilátero con dos lados tangentes al círculo de centro O y radio $\sqrt{3}$. Determine el área del cuadrilátero $AOCB$.



(British Columbia Colleges Junior High School Mathematics Contest, Final Round 1997, Part A)

TEORÍA DE NÚMEROS.

1. Determine todos los a, b tales que $25 \cdot a^b = 25ab$. (Aquí $25ab$ representa los dígitos de $25 \cdot a^b$, no un producto.)

(CEOC, 1992)

2. Un hombre compró doce piezas de fruta (manzanas y naranjas) por 99 centavos. Si una manzana cuesta 3 céntimos más que una naranja, y compró m´as manzanas que naranjas, ¿cuántas de cada compró?

(CEOC, 1992)

3. En 1732 Euler escribió: “He obtenido resultados [correctos] a partir de un teorema elegante, de cuya veracidad estoy seguro, aunque no tengo demostración: $a^n - b^n$ es divisible por el primo $n + 1$ si ni a y b lo son”. Demostrar este teorema, usando el teorema de Fermat.

(CEOC, 1992)

4. El número 3774 es divisible por 37, 34 y 74 pero no por 77. Determine todos los números de cuatro dígitos abcd tales que sean divisibles por los números de dos dígitos ab, ac, ad, bd y cd pero que no sean divisibles por bc.

(CEOC, 1995)

5. Si N es impar, ¿cuántas soluciones tiene $x^2 - y^2 = N$?

(CEOC, 1992)

FUNCIONES O SUCESIONES.

1. Determine todas las sucesiones $p_1 < p_2 < \cdots p_n$ de números primos diferentes tales que

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_n}\right)$$

es un entero.
(CEOC, 1995)

2. Considere la función $f(x) = \dfrac{cx}{2x+3}$, $x \neq -\dfrac{3}{2}$. Determine todos los valores de c para los cuales $f(f(x)) = x$.
(The Eleventh W.J. Blundon Contest, Febrero 23, 1994)

3. Sea $\{a_n\}$ una sucesión definida de la siguiente manera

$$a_{n+1} + a_{n-1} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right) a_n, \qquad n \geq 1.$$

pruebe que si $\left|\dfrac{a_2}{a_1}\right| \geq 2$, entonces $\left|\dfrac{a_n}{a_1}\right| \geq n$.
(CEOC, 1996)

4. Determine todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq x$ y $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todos los números reales x y y.
(CEOC, 1998)

5. Si *f(x)* es un polinomio tal que $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ entonces, determine $f(x^2 - 1)$.
(Taller de preparación # 1 para grado 11, Universidad de Antioquia, Colombia, 2005)

6. CURIOSATO.

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

Esta columna tiene como finalidad mostrar ejercicios de preparación o competencias olímpicas en fases iniciales que se desarrollan en otros países.

Estos tipos de ejercicios son de selección única y se procurará brindar la solución de todos los ejercicios que se propongan. Es importante hacer notar que los mismos pueden servir de preparación para estudiantes que participan en los distintos niveles de la Olimpiada Costarricense de Matemática.

Continuamos con ejercicios correspondientes a los Problemas Introductorios de la Olimpiada Sonorense de Matemática, estado de la República de México.

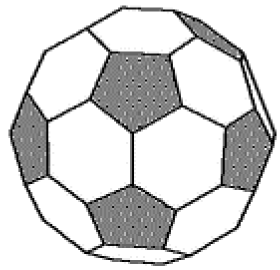
Problema 51. En una hoja de papel cuadriculado cada cuadrito mide 1 x 1. Se coloca una moneda de diámetro $\sqrt{2}$? encima. ¿Cuál es el máximo número de cuadritos que puede cubrir parcialmente (de manera que la región cubierta en ese cuadrito tenga área mayor que 0) la moneda?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 52. Yo salí de mi casa en automóvil a las 8:00 de la mañana. Un automóvil que va al doble de mi velocidad sale también de mi casa, me alcanza exactamente a la mitad del camino y llega 1:30h antes que yo a nuestro lugar de destino. ¿A qué hora salió el otro automóvil?

(a) 8:00 h (b) 8:30 h (c) 9:00 h (d) 9:30 h (e) 10:00 h

Problema 53. Un poliedro en forma de balón de fútbol tiene 32 caras: 20 son hexágonos regulares y 12 son pentágonos regulares. ¿Cuántos vértices tiene el poliedro?

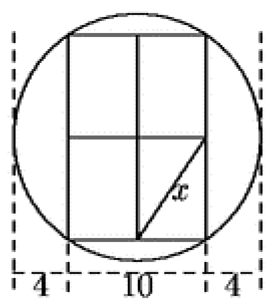


(a) 72 (b) 90 (c) 60 (d) 56 (e) 54

Problema 54. Dadas cuatro líneas diferentes, ¿cuántos puntos de intersección NO puede haber entre ellas?

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) 6

Problema 55. ¿Cuál es la longitud de **x** en la figura?



(a) $\sqrt{116}$ (b) $4\sqrt{10}$ (c) 9 (d) 12 (e) 18

Problema 56. Si **S** = 1 **+** 2 **+** 3 **+** ... **+** 100, ¿cuántos signos **+** hay que cambiar por signos **-** para obtener 1991 en lugar de **S**?

(a) Es imposible (b) 3 (c)4 (d) 5 (e) 6

Problema 57. Cinco amigos **P**,**Q**,**R**,**S** y **T** se dan la mano. Tanto **P** como **Q** estrecharon la mano de uno solo de sus amigos, mientras que **R**, **S** y **T** estrecharon cada uno la mano de dos. Sabemos que **P** estrechó la mano de **T**. ¿Quiénes podemos asegurar que no se dieron la mano?

(a) **T** y **S** (b) **T** y **R** (c) **Q** y **R** (d) **Q** y **T** (e) **Q** y **S**

Problema 58. En un concurso de baile los jueces califican a los competidores con números enteros. El promedio de las calificaciones de un competidor es 5.625 ¿Cuál es el número mínimo de jueces para que eso sea posible?

(a) 2 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

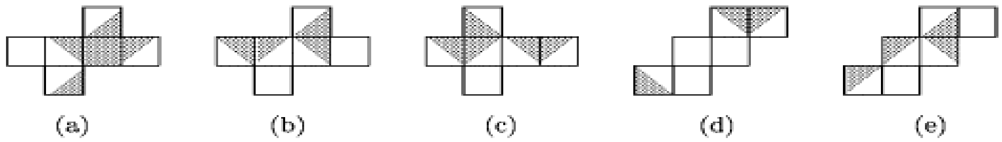
Problema 59. Una caja que compró mamá está llena de chocolates en forma de cubo. Sara se comió todos los del piso de arriba, que eran 77. Después se comió 55, que eran los que quedaban en un costado. Después se comió los que quedaban enfrente. Sobraron algunos chocolates en la caja; ¿cuántos?

(a) 203 (b) 256 (c) 295 (d) 300 (e) 350

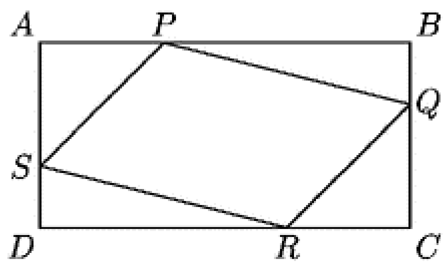
Problema 60. La maestra distribuyó la misma cantidad de dulces entre cada uno de 5 niños y se quedó tres para ella misma. No se acuerda cuántos dulces tenía, pero se acuerda que era un múltiplo de 6 entre 65 y 100. ¿Cuántos dulces tenía?

(a) 63 (b) 78 (c) 90 (d) 93 (e) 98

Problema 61. Las siguientes figuras consisten en cubitos desdoblados. ¿Cuál de ellas corresponde a un cubo en el que cada dos regiones triangulares que comparten una arista son del mismo color?



Problema 62. En la figura los puntos **P**,**Q**,**R** y **S** y **T** dividen cada lado del rectángulo en razón **1:2**. ¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo **PQRS** y el área de **ABCD**?



(a) 2/5 (b) 3/5 (c) 4/9 (d) 5/9 (e) 2/3

Problema 63. Consideremos 48 canicas repartidas en tres montones **A**, **B** y **C** de manera que si del montón **A** pasamos al **B** tantas canicas como hay en el **B**, luego del **B** pasamos al **C** tantas canicas como hay en el **C** y del **C** pasamos al **A** tantas como existen ahora en el **A**, tendremos el mismo número de canicas en cada montón. ¿Cuántas canicas había al principio en el montón **A**?

(a) 16 (b) 19 (c) 20 (d) 22 (e) 30

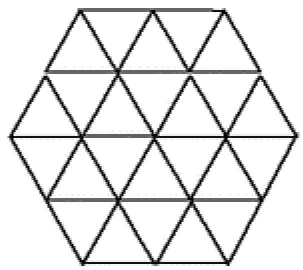
Problema 64. El producto de tres enteros positivos es 1500 y su suma es 45. ¿Cuál es el mayor de esos tres números?

(a) 27 (b) 28 (c) 29 (d) 30 (e) 31

Problema 65. Se tienen dos círculos con centro en el mismo punto, pero cuyos perímetros difieren en 1 cm. ¿cuál es la diferencia entre sus radios?

(a) $\frac{1}{(3\pi)}$ (b) $\frac{1}{(4\pi)}$ (c) π cm (d) 2π cm (e) 4π cm

Problema 66. Un zoológico tiene forma hexagonal con celdas que son triángulos equiláteros de lado 10, como en la figura. En este zoológico se quieren poner 1000 animales salvajes; por seguridad no puede haber dos animales en una misma celda y si una celda está ocupada ninguna de las que comparte un lado con ella puede estarlo. ¿Cuánto mide el lado del hexágono más chico que tiene esta propiedad?



(a) 13 (b) 16 (c) 19 (d) 22 (e) 25

Problema 67. Se escriben en sucesión todos los números del 1 al 2001, en orden, uno a continuación del otro, para formar un número muy grande que llamaremos **G** (es decir, **G** = 1234567891011 ... 20002001) ¿Cuál es la cifra central de **G**?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

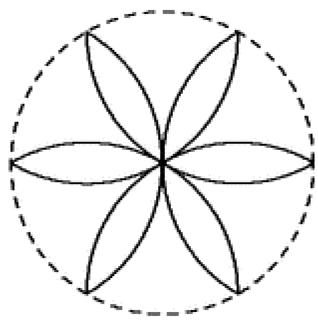
Problema 68. La siguiente figura se forma a partir de un triángulo equilátero de área 1 prolongando cada lado dos veces su longitud en ambas direcciones. El área de esta figura es:

(a) 31 (b) 36 (c) 37 (d) 41 (e) 42

Problema 69. El resultado de la operación siguiente: 1-2-3+4+5-6-7+8+ ... -1998-1999+2000 es

(a) $\frac{(2001\times 2001)}{2}$ (b) $\frac{(2002-2000)}{2}$ (c) 2001 (d) 0 (e) 2

Problema 70. Una flor se ha dibujado dentro de un círculo manteniendo la misma apertura del compás, como se muestra en la figura. Si el perímetro de la flor es 2, ¿cuál es el radio del círculo?

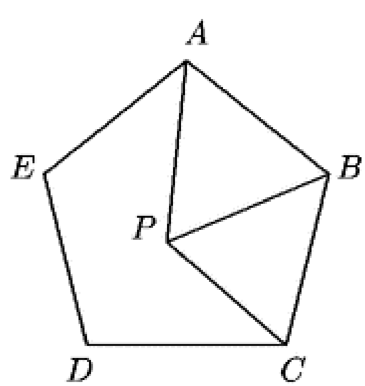


(a) $\frac{1}{(3\pi)}$ (b) $\frac{1}{(4\pi)}$ (c)1/6 (d)$2\pi/3$ (e)$\pi/8$

Problema 71. ¿Cuántas parejas de enteros positivos **(a,b)** satisfacen $\mathbf{a}^2$-$\mathbf{b}^2$=15?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 72. En la figura, **ABCDE** representa un pentágono regular (de 1 cm de lado) y **ABP** es un triángulo equilátero. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\angle$**BCP**?



(a) 45^o (b) 54^o (c) 60^o (d) 66^o (e) 72^o

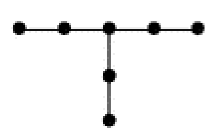
Problema 73. El número **-1** es solución de la ecuación de segundo grado $\mathbf{3x^2+bx+c=0}$. Si los coeficientes **b** y **c** son números primos, el valor de **3c-b** es:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 74. Una sucesión se forma de la manera siguiente: el primer término es 2 y cada uno de los términos siguientes se obtiene del anterior elevándolo al cuadrado y restando 1 (los primeros términos son $2, 2^2-1=3$, $3^2-1=8$, $8^2-1=63$, ...). La cantidad de números primos que hay en la sucesión es:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) infinita

Problema 75. El número de triángulos con sus tres vértices en los puntos de la figura es:



(a) 20 (b) 24 (c) 28 (d) 32 (e) 36

5. Solución al *CURIOSATO*

Miguel Ángel Arias Vílchez
Giovanni Buckcanan Aguilar
Kendrick Mitchell Maturin
Mauricio Rodríguez Mata

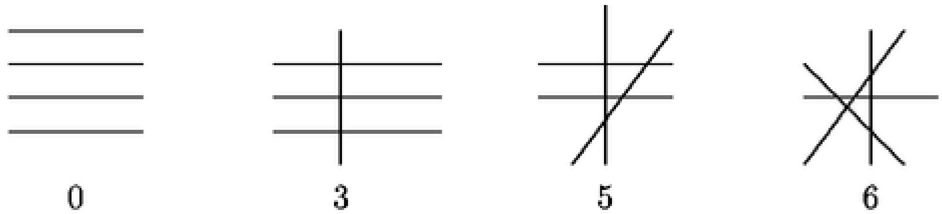
A continuación brindamos la solución al *CURIOSATO* de esta edición con la finalidad de que nuestros lectores tengan una guía para el abordaje de estos tipos de ejercicios y que ello contribuya a la preparación de jóvenes para competencias nacionales.

Solución 51. Observemos que $\sqrt{2}<2$, así que la moneda toca a lo más 3 cuadros horizontales y 3 verticales. Entonces el problema se reduce a considerar una cuadrícula de 3 x 3. Si la moneda cubre un pedazo de algún cuadro de la esquina, entonces no cubre el de la esquina contraria porque la mínima distancia entre las dos esquinas opuestas es $\sqrt{2}$(la diagonal del cuadrado). Son 4 esquinas, entonces hasta ahora hemos visto que a lo más la moneda cubre 7 cuadritos. Ahora veamos que sí es posible lograr cubrir 7 cuadritos. Para esto observemos que si colocamos la moneda circunscribiendo el cuadro central, entonces cubrirá (parcialmente) 5 cuadros; la recorremos hacia arriba un poco (menos de $\sqrt{2}/2$)para lograr que cubra todos los cuadros salvo las esquinas inferiores. La respuesta es (d).

Solución 52. En vista de que a medio camino estábamos en el mismo lugar, de que las velocidades fueron constantes y de que el otro automóvil llegó 1h antes, entonces también salió 1:30h después: a las 9:30 de la mañana. La respuesta es (d).

Solución 53. Observemos que cada vértice lo es de cada pentágono y que dos pentágonos no comparten ningún vértice. Como son 12 pentágonos y cada uno tiene 5 vértices, en total hay 60 vértices. (De otra manera: Hay 20 hexágonos, cada uno con 6 vértices, para un total de 120 vértices. Hay 12 pentágonos, cada uno con 5 vértices, para un total de 60 vértices. Pero cada vértice es compartido por tres figuras, por lo tanto el poliedro tiene (120+60)/3 = 60 vértices.) La respuesta es (c).

Solución 54. Por el enunciado sabemos que sólo una de las respuestas es imposible, así es que basta dar un ejemplo de los casos que sí son posibles:



La respuesta es (b).

Solución 55. Tenemos que **x** es la longitud de la diagonal de un rectángulo. La otra diagonal del mismo rectángulo es un radio del círculo. Como el diámetro del círculo mide 10 + 4 + 4 = 18, tenemos que **x** mide 9. La respuesta es (c).

Solución 56. Del 1 al 100 hay 50 números impares que, sumados a los otros 50 números pares, dan un número par. Si cambiamos un signo **+** por uno **-**, por ejemplo si escribimos **- 5** en lugar de **+ 5**, le estamos restando 10 a **S**; es decir, si escribimos **- n** en lugar de **+ n**, en realidad le estamos restando 2**n** a **S**. Pero, tanto **S** como 2**n** son pares, por lo tanto **S** - 2**n** es número par siempre. Entonces no es posible obtener 1991 de esta manera. La respuesta es (a).

Solución 57. Si **Q** le hubiera dado la mano a **T**, entonces ni **P** ni **Q** ni **T** le hubieran dado la mano a nadie más, lo cual no es posible pues **R** le dio la mano a dos amigos. La respuesta es (d).

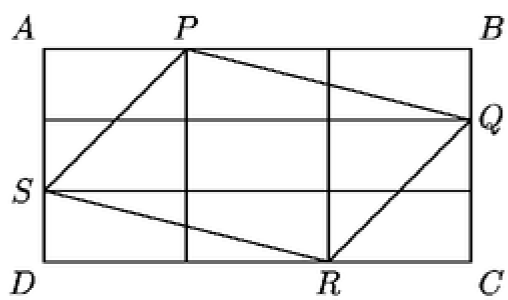
Solución 58. Observemos que 5.625 = 5625/1000 = 45/8, que es una fracción simplificada y, por lo tanto, tenemos que multiplicar por 8 para poder obtener un entero que sea la suma de las calificaciones de los jueces. La respuesta es (c).

Solución 59. Como el número de chocolates del piso de arriba es 77, la cantidad de chocolates a lo largo por la cantidad de chocolates a lo ancho es 77. Las posibilidades son 11 a lo largo y 7 a lo ancho, o 77 a lo largo, en una sola hilera. Como al final quedan chocolates en la caja, la posibilidad correcta es la primera: 11 x 7. Como después de comerse el piso de arriba quedan 55 en un costado, cuando la caja estaba llena debió tener 6 chocolates a lo alto. Así, inicialmente había 7 x 6 x 11 = 462 chocolates. Originalmente en el frente de la caja había 7 x 6=42 chocolates, de los cuales Sara se comió primero 7 de la fila de arriba y 5 que quedaban en la fila de un costado. Quedan 462 - 77 - 55 - 30 = 300 chocolates. La respuesta es (d).

Solución 60. Como se quedó con 3 dulces, el número inicial de dulces termina en 3 o en 8, pero como es un múltiplo de 6, es par, por lo que termina en 8. La única posibilidad es 78. La respuesta es (b).

Solución 61. Doblando dos cuadrados que tengan las regiones inmediatas a una misma arista del mismo color, nos damos cuenta de que necesitamos que los vértices en que esas aristas convergen tengan todas las regiones que incluyen a esa arista del mismo color. Cada arista tiene tres regiones cercanas, por lo cual el número de regiones de cada color debe ser divisible entre tres. Solamente a) y d) cumplen con este requisito, y es fácil darse cuenta de que al doblar a) hay varias aristas que no comparten regiones del mismo color. La respuesta es (d).

Solución 62. Dibujamos paralelas al lado **AD** por **P** y **R** y también al lado **AB** por **S** y **Q**. Cada uno de los rectángulos pequeños representa 1/9 del área original. El área de los triángulos rectángulos que tienen como cateto un lado del rectángulo **PQRS** es un 1/9 del área de **ABCD**. Así, el área de **PQRS** es 1/9 + 4/9 = 5/9 del área de **ABCD**. La respuesta es (d).



Solución 63. Cada montón, al final, tenía 16 canicas (en total había 48 y cada uno tenía el mismo número de canicas). El montón **A** tenía 16 canicas y, como del **C** pasamos al **A** tantas canicas como éste tenía, el **A** tenía 8 y le pasamos 8 canicas del **C**, luego el **C** tenía 16+8=24 canicas. Del **B** pasamos al **C** tantas canicas como había en el **C**, entonces pasamos 24/2=12

canicas del **B** al **C**, y el **B** tenía 16+12=28 canicas. Por último, del **A** pasamos al **B** tantas canicas como éste tenía, entonces pasamos 28/2=14 canicas del **A** al **B**, luego el **A** tenía 14+8=22 canicas. Por lo tanto, había al principio 22 canicas en el montón **A**. La respuesta es (d).

Solución 64. Observemos que $1500=2^2 \times 5^3 \times 3$. Tenemos que repartir los tres **5**'s que aparecen en la factorización de 1500 entre los tres números que buscamos. Es claro que los tres no pueden quedar en un mismo número pues $5^3 = 125 > 45$. Entonces, por lo menos dos de los números son múltiplos de 5; pero el tercero es la diferencia de 45, que es múltiplo de 5, y la suma de los otros dos números también lo es; así, también ese número debe ser múltiplo de 5. Ahora ya sólo tenemos que repartir los dos **2**'s y el 3, buscando que la suma sea 45. Probando todas las posibilidades vemos que la única es que los números sean 30, 10 y 5. La respuesta es (d).

Solución 65. Si **r** el radio de la circunferencia más pequeña y **R** el de la más grande, tenemos que $2\pi \mathbf{r} + 1 = 2\pi \mathbf{R}$, y por lo tanto $\mathbf{R}-\mathbf{r} = 1/2\pi$. La respuesta es (a).

Solución 66. Si agrupamos las celdas por parejas según vértices vecinos como se muestra en la figura (a), sabemos que en cada pareja una celda está ocupada y la otra no. Así, cuando más, puede usarse la mitad de las celdas del zoológico para acomodar a todos los animales y, por lo tanto, necesitaremos al menos 2000 celdas para acomodarlos. La figura (b) muestra cómo es posible acomodar animales en un zoológico hexagonal utilizando la mitad de las celdas. Es fácil observar que en un triángulo equilátero de lado **n** hay $\mathbf{n}^2$ triángulos de lado 1. Un hexágono regular está compuesto por 6 triángulos equiláteros, como se muestra en la figura (c). Como un hexágono de lado n tiene $6\mathbf{n}^2$ celdas tenemos que $6\mathbf{n}^2 \geq 2000$, por lo cual necesitamos $\mathbf{n} \geq 19$, así que 19 es suficiente. La respuesta es (c).

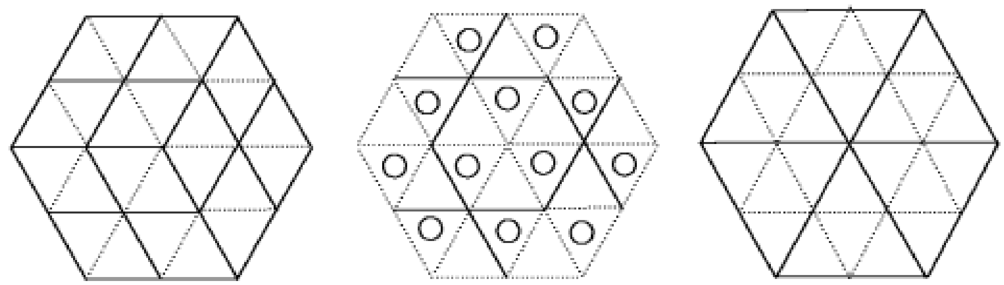


figura (a) figura (b) figura (c)

Solución 67. El número total de cifras de **G** es

9+2(99-9)+3(999-99)+4(2001-999)=9+180+2700+3990=6879.

Entonces la cifra central está en el lugar 3440. Para llegar a esa cifra necesitamos todos los números del 1 al 999 (pues 9+180+2700=2889) y otras 551 cifras más. Como a partir del 1000 todos los números que se escriben tienen 4 cifras y 137 x 4=548, necesitaremos 137 números después del 999 y 3 cifras más, es decir, la tercera cifra que se escriba después de 1136, que es el 3 de 1137. La respuesta es (b).

Solución 68. El triángulo **ABC** es semejante al triángulo **CEF** en razón **1:2**, y por lo tanto el área de **CEF** es 4 (la base y la altura miden el doble que las de **CEF**). De la misma manera el triángulo **ABC** es semejante al triángulo **ADE** en razón **1:3**, y el área de **ADE** es 9. Entonces, el área de la figura es (9-1) x 3+ (4 x 3)+1 = 37. La respuesta es (c).

Solución 69. Reagrupemos los sumandos de la siguiente manera: ((1 - 2) + (5 - 6) + ... + (1997 - 1998)) + ((-3 + 4) + (-7 + 8) + ... + (-1999+2000)) = (1) x 500 + (-1) x 500 = 0. La respuesta es (d).

Solución 70. Llamemos **r** al radio. Cada uno de los 6 arcos dibujados mide 1/3 del perímetro del círculo; entonces **r** satisface 6 x 1/3 /x 2π **r** = 2. La respuesta es (a)

Solución 71. Como **a** y **b** son enteros positivos y **(a + b)(a - b)** = 15, entonces **(a + b)** es un entero positivo, **(a - b)** también lo es, y **(a + b) > (a-b)**. Hay dos posibilidades: **(a - b)** = 1 y **(a + b)** = 15 o **(a + b)** =3 y **(a - b)**=5. Si **(a - b)**=1 y **(a + b)**=15 tenemos que **a** = 8 y **b** = 7. Si

(a - b)=3 y **(a + b)**=5 tenemos que **a** = 4 y **b** = 1. Entonces solamente hay 2 parejas de enteros positivos que cumplen la ecuación. La respuesta es (c).

Solución 72. Utilizaremos varias veces el resultado de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180^o. Todos los ángulos del pentágono miden $(180^o \times 5 - 360^o)/5 = 108^o$. Entonces $\angle$**PBC** = 48^o. Observemos que **PBC** es un triángulo isósceles, luego $\angle$**BCP** = $\angle$ **BPC** = $(180^o-48^o)/2 = 66^o$. La respuesta es (d).

Solución 73. Como **-1** es solución de la ecuación, entonces **3 – b + c = 0**, de ahí **b – c = 3**, por lo cual uno de ellos (**b** o **c**) tiene que ser impar, y el otro debe ser 2 (**b** y **c** son primos y su diferencia es impar). Como **b = c + 3** y ambos son positivos, necesariamente **c = 2** y **b = 5**. Por lo tanto **3c - b = 3 x 2 - 5 = 1**. La respuesta es (b).

Solución 74. Cada término de la sucesión después del primero (2, que es primo) es de la forma $\mathbf{n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)}$ con **n** entero positivo. La única manera de que un número de la sucesión sea primo es que **n-1=1**, lo que implica que **n = 2**. En este caso, $\mathbf{n^2 - 1=3}$, el segundo número de la sucesión. Por lo tanto el 2 y el 3 son los únicos primos que aparecen. La respuesta es (b).

Solución 75. Llamemos **A**, **B**, **C** y **D** a los vértices como se indica en la figura. Un triángulo con vértices sobre los puntos de la figura debe tener forzosamente 1 o 2 vértices sobre los puntos del segmento **AC**. Hay 10 parejas distintas de puntos sobre **AC** que pueden ser vértices de un triángulo junto con otro punto de los dos que hay sobre el segmento **BC** (sin contar el punto **B**), por lo tanto hay 10 x 2=20 triángulos de este tipo. Si sólo hay un punto sobre **AC**, quiere decir que es alguno de los 4 puntos sobre **AC** que son distintos a **B**. Los otros dos vértices en el segmento **BD** que son distintos a **B** son la pareja de vértices que hace falta para completar un triángulo, por lo cual sólo hay 4 triángulos de este tipo. En total hay 20 + 4 = 24 triángulos sobre los puntos de la figura. La respuesta es (b).

6. Solución a los problemas anteriores de la columna "Olimpiadas alrededor del mundo".

Randall Godínez.
Arlene Martínez.
Melissa Ramírez.
Carlos Rodríguez.

Presentamos, a continuación, la solución de los diez problemas presentados en esta misma columna pero de la edición anterior. Hemos procurado adjuntar varias soluciones a los problemas con el fin de hacer notar que los mismos pueden ser enfocados y resueltos de diversas formas y que ello es lo que se busca en las competencias olímpicas: favorecer el pleno desarrollo de la creatividad del participante al momento de enfrentar los problemas y de ninguna manera encajonar su pensamiento.

Al mismo tiempo que se presenta una solución a determinado problema se advierte, cuando ello lo amerita, la teoría que se está aplicando en la solución del mismo con el fin de que se cuente con todo el marco teórico que se requiera para poder resolver otros problemas que puedan ubicarse en la misma categoría o bien que puedan reducirse a ellos.

Cuando se indique que la solución es oficial lo que se pretende indicar es que esa es la solución que se dio en la competencia señalada por parte del comité organizador o bien de su proponente.

Recuérdese que ningún problema está completamente cerrado por lo que se les solicita a nuestros estimables lectores que nos envíen sus comentarios o sugerencias que tengan a esta columna en particular mediante alguno de los correos indicados en la presentación.

Pues bien, veamos las soluciones de la columna anterior !!

1. En una Olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están alineados en filas y columnas de tal manera que hay más de dos filas y en cada fila hay más de dos asientos. Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano; cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que están junto a él (adelante, atrás, a los lados y en diagonal) y sólo a éstos. Alguien observa que se dieron 1020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay? (IX Olimpiada Nacional de Matemáticas de México, noviembre de 1995)

Solución:

Sea **n** el número de filas y **m** la cantidad de lugares en cada fila del salón.

(i) Cada una de las $\mathbf{(n-2)(m-2)}$ personas que están en el interior del rectángulo saluda a **8** personas que están a su alrededor.

(ii) Cada una de las $\mathbf{2[(n-2)+(m-2)]}$ personas que están en las orillas del rectángulo, pero no en las esquinas, saluda a **5** personas.

(iii) Las **4** personas de las esquinas saludan a **3**.

Así contando los saludos dos veces y desarrollando tenemos que:

$$8(n-2)(m-2) + 10[(n-2) + (m-2)] + 12 = 2040$$

$$8nm - 6n - 6m = 2036.$$

Para resolver esta ecuación podemos proceder de varias maneras. Una de ellas podría ser buscando una factorización:

$$16mn - 12m - 12n = 4072$$

$$16mn - 12m - 12n + 9 = 4081$$

$$4n(4m-3) - 3(4m-3) = 4081$$

$$(4n-3)(4m-3) = 4081 = 7\text{x}11\text{x}53$$

como **7** y **11** no son de la forma **4s-3,** las únicas soluciones son: $\mathbf{(4n-3=77 \text{ y } 4m-3=53)}$ o bien $\mathbf{(4n-3=53 \text{ y } 4m-3=77)}$, por lo que $\mathbf{(n=20 \text{ y } m=14)}$ o bien $\mathbf{(n=14 \text{ y } m=20)}$. En cualquier caso el número de concursantes es de **280**.

Otra forma para resolver la ecuación podría ser usando congruencias: Tenemos que $\mathbf{4nm-3n-3m=1018}$, de donde $\mathbf{n(4m-3)=3m+1018}$. Simplificando módulo $\mathbf{4m-3}$ tenemos la siguiente sucesión de congruencias equivalentes:

$$3m + 1018 \equiv (\text{mód. } 4m - 3),$$

$$12m + 4072 \equiv (\text{mód. } 4m - 3),$$

$$3(4m - 3) + 4081 \equiv (\text{mód. } 4m - 3) \text{ y}$$

$$4081 \equiv (\text{mód. } 4m - 3).$$

Entonces **$4m - 3$** es divisor de **$4081 = 7 \times 11 \times 53$**, y así las posibilidades para **$4m - 3$** son **1, 7, 11, 53, 77, 371, 583** y **4081**. Como **m** y **n** no pueden ser 1, las únicas posibilidades son **$m = 14$** (y **$n = 20$**) o **$m = 20$** (y **$n = 14$**). En cualquier caso, el número de alumnos es **14x20=280.**

2. Encuentra todos los números primos positivos **p** tales que **$8p^4 - 3003$** también sea un primo positivo.
(XI Olimpiada Nacional de Matemáticas de México, noviembre de 1997)

Solución:

Para **$p = 5$** tenemos que **$8p^4 - 3003 = 1997$**, que es primo. Ahora veamos que es la única posibilidad. Sea **p** un número primo distinto de 5 y supongamos que **$8p^4 - 3003$** es primo. Podemos proceder de dos maneras: Tenemos que **$8p^4 - 3003 \equiv 3p^4 - 3 \equiv 3(p^4 - 1)$ (mód. 5),** pero **$p^4 - 1 \equiv 0$ (mód. 5)** para cualquier primo **$p \neq 5$** (esto se comprueba fácilmente analizando los posibles residuos de **p**), así que **$8p^4 - 3003$** es divisible entre 5 y, como estamos suponiendo que es primo, la única posibilidad es **$8p^4 - 3003 = 5$**, lo cual es un absurdo pues **$^{3008}/_{8} = 376$** que no tiene raíz cuarta entera.

Nota: Se puede evitar el lenguaje de las congruencias, observando que si **p** es un primo distinto de 2 y de 5, entonces **p** termina en 1, 3, 7 o 9, así que **p^4** termina en 1 y, por tanto, **$8p^4 - 3003$** termina en 5, lo cual lo hace forzosamente múltiplo de 5. El caso **$p = 2$** se puede tratar aparte (viendo que **$8(2)^4 - 3003 > 0$** o que también **2^4** termina en 6, así que **$8p^4 - 3003$** también termina en 5.

3. Una función $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ satisface $f(x+f(y)) = x + f(f(y))$ para todos los números reales x y y. Sabiendo que $f(2)=8$, calcule $f(2005)$.
(XXVII Olimpiada Brasileira de Matemática, Segunda fase del Nivel 3, 2005)

Solución:

Sustituyendo y por 2 y x por $a - f(2) = a - 8$, obtenemos

$$f(a - f(2) + f(2)) = a - 8 + f(f(2))$$

$$\Leftrightarrow f(a) = a - 8 + f(8).$$

Substituyendo a por 2 en la última ecuación, obtenemos

$$f(2) = 2 - 8 + f(8)$$

$$\Leftrightarrow 8 = 2 - 8 + f(8)$$

$$\Leftrightarrow f(8) = 14.$$

Así, $f(a) = a - 8 + 14 = a + 6$ y $f(2005) = 2005 + 6 = 2011$.

4. Cada uno de los números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2004}$ puede ser igual a $\sqrt{2}+10$ a $\sqrt{2}+1$. ¿ Cuántos valores enteros distintos puede asumir la suma

$$\sum_{k=1}^{2004} x_{2k-1}x_{2k} = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \cdots + x_{2003}x_{2004} \text{ ?}$$

(XXVI Olimpiada Brasileira de Matemática, Segunda fase del Nivel 3, 2004)

Solución:

Los posibles productos $x_{2k-1}x_{2k}$ son $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = 3 - 2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1) = 3 + 2\sqrt{2}$ y $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$. Suponga que a productos son iguales a $3 - 2\sqrt{2}$, b productos son iguales a $3 + 2\sqrt{2}$ y $1002 - a - b$ productos son iguales a 1.

La suma es igual a

$$a(3 - 2\sqrt{2}) + b(3 + 2\sqrt{2}) + 1002 - a - b = 1002 + 2a + 2b + 2(b-a)\sqrt{2}.$$

Así, para que la suma sea entera, debemos tener $a = b$. Luego, la suma es igual a $1002 + 4a$.

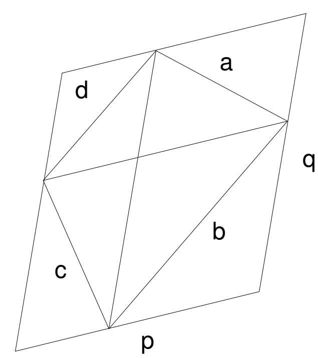
Como a varía de 0 a 501 (pues $a + b$ no puede ser mayor que 1002), la suma puede asumir 502 valores enteros.

5. Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que $2(2+\sqrt{2})$.
(XXXIII Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional, Valencia, Marzo 1997)

Solución 1:

Sea el cuadrilátero de lados a, b, c, d y diagonales p y q.

Trazando las paralelas por cada vértice a la diagonal que no pasa por él se forma un paralelogramo de área 2 y lado p y q.



Por el teorema isoperimétrico, de todos los paralelogramos de área 2, el cuadrado tiene perímetro mínimo que vale $4\sqrt{2}$, luego

$$2(p+q) \geq 4\sqrt{2} \Leftrightarrow p+q \geq 2\sqrt{2} \quad (1)$$

En cuanto al los lados por el mismo teorema para una cuadrado de área 1 el perímetro es 4 luego:

$$a + b + c + d \geq 4 \quad (2)$$

Sumando(1) y (2) se obtiene el resultado.

Solución 2: (Sin usar la propiedad isoperimétrica).

Consiste en establecer directamente las desigualdades (1) y (2).

Si α es el ángulo que forman las diagonales, tenemos:

$$1 = \frac{pq}{2}\operatorname{sen}\alpha \le \frac{pq}{2} \Leftrightarrow pq \ge 2$$

pero $(p + q)^2 = (p - q)^2 + 4pq \ge 4pq \ge 8$. de donde $p + q \ge \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (1).

Para los lados, si descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos mediante la diagonal q, tenemos:

$$1 \le \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$$

Descomponiendo ahora en dos triángulos mediante la diagonal p resulta:

$$1 \le \frac{bc}{2} + \frac{da}{2}$$

y de ambas desigualdades se obtiene: $ab + bc + cd + da \ge 4$.

Pero:

$(a + b + c + d)^2 = ((a + c) - (b + d))^2 + 4 (a + c)(b + d) \ge 4 (a + c)(b + d) \ge 16$,

de donde

$$a + b + c + d \ge 4 \quad (2)$$

Basta sumar (1) y (2) para obtener lo pedido.

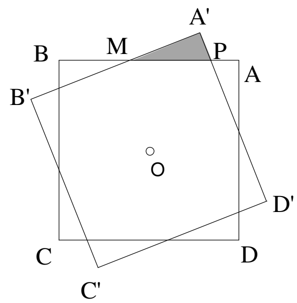
6. Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.

(XXXIII Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional, Valencia, Marzo 1997)

Solución 1:

Por la simetría bastará considerar $0 < \alpha < 90º$, ya que la función es periódica con periodo de un cuarto de vuelta.

El área pedida S(α) sale restando del área del cuadrado cuatro triángulos como el PA'M.



Llamando x al cateto PA' e y al cateto A'M, el área de cuatro triángulos vale 2xy. Como el lado B'A' vale 1, tenemos:

$$x + y = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

relación que elevada al cuadrado y simplificada queda:

$$2xy = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

pero $x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\alpha, \quad y = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{sen}\,\alpha$, y sustituyendo en (1) resulta:

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,(1 + \cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha}$$

sustituyendo en (2) y operando obtenemos:

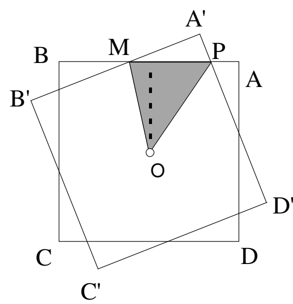
$$2xy = 1 - \frac{2}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha - 1}{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha + 1}.$$

Finalmente para el área pedida obtenemos:

$$S(\alpha) = 1 - \frac{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha - 1}{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{2}{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha + 1}$$ con $0 \le \alpha \le 90º$

Solución 2:

El área pedida consta de 8 triángulos como el sombreado en la figura OPM.



Tomando como base b = MP, la altura es constante (de trazos en la figura) y vale $\frac{1}{2}$.

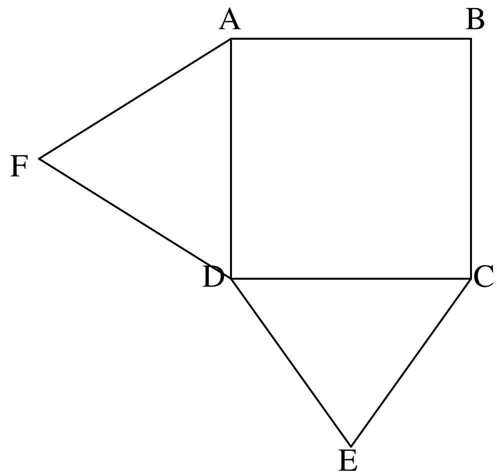
En el triángulo PA'M se tiene MA' = b cos α, PA' = b sen α ; pero BM = MA' y PA = PA', además BM + MP + PA = 1 $\Leftrightarrow$ b cos α + b + b sen α = 1, de donde

$$b = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}$$

y el área pedida es:

$$S(\alpha) = 8\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} \quad \text{con } 0 \le \alpha \le 90º$$

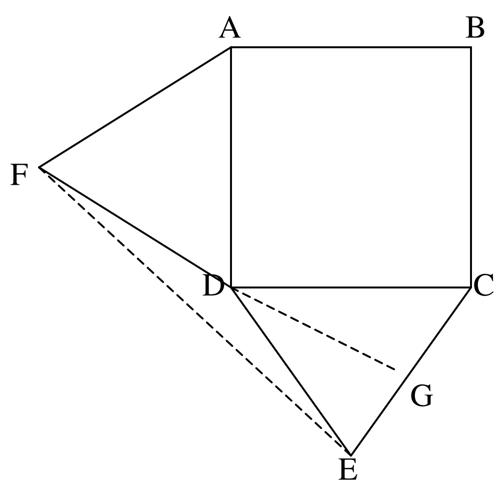
7. En la figura siguiente, [*ABCD*] es un cuadrado y [*ADF*] y [*CED*] son triángulos equiláteros. ¿Cuál es la razón entre las áreas del triángulo [*DEF*] y el área del cuadrado [*ABCD*]?



(XXIII Olimpiada Portuguesa de Matemática, 1ª Eliminatoria Categoría B, 2004)

Solución 1:

Sea *G* el punto de intersección de [*CE*] con la recta que pasa por *F* y *D*. Una vez que $A\widehat{D}F = E\widehat{D}C = 60^{o}$ se tiene que $F\widehat{D}E = 150^{o}$. Además, como *FD* = *DE* el triángulo [*DEF*] es isósceles y, entonces, $D\widehat{E}F = 15^{o} = D\widehat{F}E$.

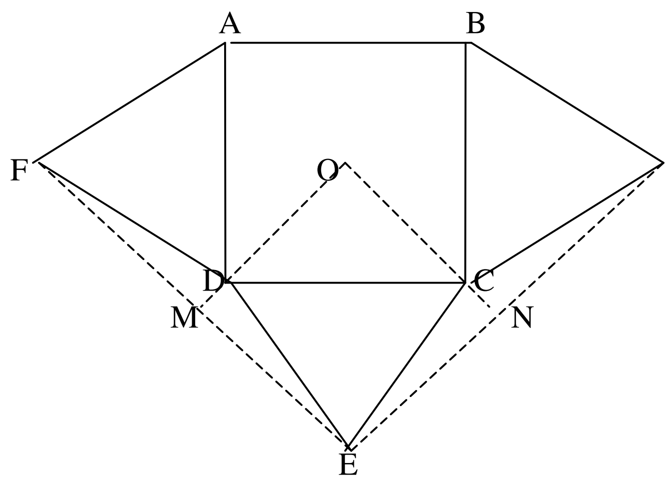


También se tiene que $G\hat{E}D = 60^o$, luego $G\hat{E}F = 75^o$ y $D\hat{G}E = 90^o$. Por otro lado, [*DG*] es la altura del triángulo equilátero [*CED*] relativa al lado [*CE*] y $GE = \frac{CE}{2}$. Por otro lado, [*GE*] es la altura del triángulo [*DEF*] relativa al lado [*FD*] y, así, el área del triángulo [*DEF*] es $\frac{FD \times GE}{2} = \frac{FD \times CE}{4} = \frac{1}{4}(AB \times BC)$.

Por tanto, el área del triángulo [*DEF*] es un cuarto del área del cuadrado [*ABCD*].

Solución 2:

Sea [*BGC*] el triángulo equilátero construido sobre [*BC*] y *O* el centro del cuadrado [*ABCD*], como se indica en la figura.



La prolongación de [*OC*] interseca [*EG*] en el punto *N* y l La prolongación de [*OD*] interseca a [*FE*] en el punto *M*.

Como el triángulo [*FOE*] es isósceles y [*OM*] biseca al ∠*FOE*, $E\hat{M}O = 90^o$ y *M* es el punto medio de [*FE*]. Del mismo modo se tiene que $O\hat{N}E = 90^o$. Así, [*ONEM*] es un cuadrado y *ME* = *OM* = *OD* + *DM*.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo [*DEM*] se obtiene

$$\begin{aligned} DE^2 &= DM^2 + ME^2 \\ &= DM^2 + (OD + DM)^2 \\ &= 2\,DM^2 + 2\,OD \times DM + OD^2 \end{aligned}$$

$$= 2\, DM \times (DM + OD) + OD^2$$

$$= 2\, DM \times ME + OD^2.$$

Más aún, por la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo [*OCD*], se tiene

$$DC^2 = OD^2 + OC^2 = 2\, OD^2$$

y, como $DC = DE$, se concluye que

$$DC^2 = 4\, DM \times ME.$$

Por tanto, el área del triángulo [*FDE*] es un cuarto del área del cuadrado [*ABCD*].

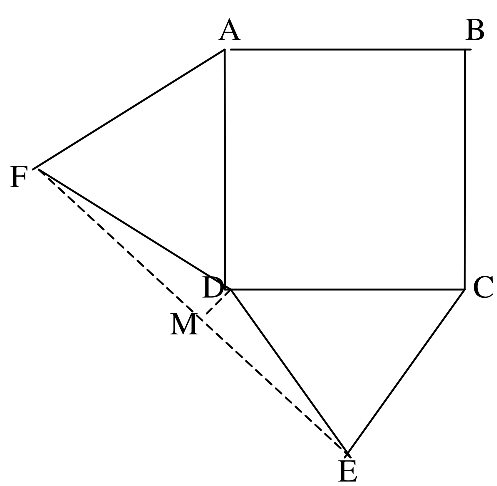
Solución 3:

Desde que $A\hat{D}F = E\hat{D}C = 60^o$, se tiene $F\hat{D}E = 150^o$. Al mismo tiempo, $FD = DE$, o sea, el triángulo [*DEF*] es isósceles, y, por eso, $D\hat{E}F = E\hat{F}D = 15^o$.

Sea *M* el punto medio de [*FE*]. Así, [*DM*] es la altura del triángulo[*DEF*] relativa a la base [*FE*], $DM = DE$ sen 15^o y $ME = DE$ cos 15*o*. Así, el área del triángulo [*DEF*] es

$$\frac{FE \times DM}{2} = DE^2\, sen 15^o \cos 15^o = \frac{1}{2} DE^2\, sen 30^o = \frac{DE^2}{4} = \frac{AB \times BC}{4}$$

Por tanto, el área del triángulo [*DEF*] es un cuarto del área del cuadrado [*ABCD*].



8. En una fila para un concierto de Súper Rock Pop estaban 2005 personas. Con el objetivo de ofrecer 3 entradas para el "backstage", se pide a la primera persona de la fila que grite "Súper", a la segunda "Rock", a la tercera "Pop", a la cuarta "Súper", a la quinta "Rock", a la sexta "Pop" y así sucesivamente. Quien dice "Rock" o "Pop" fue eliminado. Repitiendo este proceso, siempre a partir de la primera persona de la nueva fila, hasta que queden apenas 3 personas. ¿En qué posición se encontraban al inıcio esas personas?
(XXIII Olimpiada Portuguesa de Matemática, Final Categoría B, 2005)

Numeremos a las personas de la fila de 1 a 2005.

Solución 1:

No fueron eliminados los números que tienen residuo1 cuando son divididos por 3. Así, quedaran los 669 números de la forma $3k_1 + 1$, $k_1 = 0, 1, \ldots, 668$, o sea, 1, 4, 7, 10, 13,16, ..., 2002, 2005. Observe que estos números pueden ser representados por k_1, que comienza en cero. Luego, de estos 669 números no fueron eliminados los 223 números de la forma $3k_1 + 1$, con $k_1 = 3k_2$ y $k_2 = 0, \ldots, 222$. Desde que $222 = 3 \times 74$, $74 = 3 \times 24 + 2$, $24 = 3 \times 8$ y $8 = 3 \times 2 + 2$, se concluye que, apenas con cinco repeticiones del proceso, no fueron eliminados los tres números de la forma $3k_1 + 1$, con $k_1 = 3k_2$, $k_2 = 3k_3$, $k_3 = 3k_4$, $k_4 = 3k_5$, $k_5 = 3k_6$ y $k_6 = 0$, 1 e 2.

Así, las personas que ganaran las entradas estaban inicialmente en las posiciones $3^6k_6 + 1$, para $k_6 = 0$, 1 e 2,o sea, 1, 730 e 1459.

Solución 2:

La diferencia entre los números de personas consecutivas en la nueva fila es constante e igual a 3. En cada paso del proceso la diferencia entre los números de personas consecutivas es el triple de la diferencia del paso anterior. Luego de n pasos, la diferencia entre los números es 3^n y, como el número 1 siempre es escogido, los números de las personas que no fueron eliminados son $1, 3^n + 1, 2 \times 3^n + 1, 3 \times 3^n + 1, \ldots$.

En el último paso, $2 \times 3^n + 1 \leq 2005$ y $3 \times 3^n + 1 > 2005$, o sea, $n = 6$.

Las personas que ganaron estaban inicialmente en las posiciones 1, $3^6 + 1$ e $2 \times 3^6 + 1$, o sea, 1, 730 y 1459.

9. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = y,$$

$$y + \log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = z,$$

$$z + \log\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) = x.$$

(Olimpiada Israelí de Matemática, 1995)

Solución:

Es claro que $x = y = z = 0$ es una solución y si cualesquiera de $x, y,$ y z es cero, entonces los otros dos también serán cero. Asumamos que $xyz \neq 0$. Note que si t es un número real tal que $t > 0$, entonces $t + \sqrt{t^2+1} > 1 \Rightarrow \log\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) > 0$. Por otro lado, si $t < 0$, entonces

$$\begin{aligned} -2t > 0 \quad &\Longrightarrow \quad t^2 + 1 < (1-t)^2 \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{t^2+1} < 1 - t \quad \Longrightarrow \quad t + \sqrt{t^2+1} < 1 \\ &\Longrightarrow \quad \log(t + \sqrt{t^2+1}) < 0\,. \end{aligned}$$

Enumerando las tres ecuaciones como (1), (2) y (3). Si $x > 0$, entonces tenemos que $y > x > 0$ por (1), $z > y > 0$ por (2) y $x > z$ por (3). Entonces $x > z > y > x$, lo cual es una contradicción. Similarmente, si $x < 0$, entonces tenemos que $y < x < 0$ por (1), $z < y < 0$ por (2) y $x < z$ por (3). Entonces $x < z < y < x$, lo cual es otra contradicción. Por tanto, la única solución es $x = y = z = 0$.

10. α es un número real dado. Halle todas la funciones $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ tales que $\alpha x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}$ se verifica para todo número real $x > 0$.
(Olimpiada Israelí de Matemática, 1995)

Solución:

Tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) &= \frac{x}{x+1} \\ \alpha \frac{1}{x^2} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{cases} \alpha x f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x+1} \\ \alpha \frac{1}{x} f(x) + x f(\frac{1}{x}) = \frac{x}{x+1} \end{cases}.$$

Si $\alpha^2 \neq 1$, entonces se obtiene

$$f(x) = \frac{x(1-\alpha x)}{(x+1)(1-\alpha^2)}$$

y si $\alpha^2 = 1$, ésta no tiene solución. Desde que $f(x) > 0$ es fácil ver que $\alpha \in (-1, 0)$.

NOTA: La expresión $\alpha \in (-1, 0)$. indica que α pertenece al intervalo abierto cuyos extremos numéricos son –1 y 0.

7. Olimpiadas alrededor del mundo.

Randall Godínez.
Arlene Martínez.
Melissa Ramírez.
Carlos Rodríguez.

En esta columna se propondrán únicamente problemas que hayan sido parte de exámenes de competencias olímpicas, nacionales o internacionales, con esto pretendemos que otros tipos de competencias sean abordados en la columna *Problemas de Competencias no Olímpicas* de esta misma revista.

Recuerden, estimables lectores, que estamos abiertos a publicar las soluciones que ustedes nos envíen sobre estos ejercicios además de toda observación o sugerencia sobre esta columna.

1. Sobre una mesa hay 1999 fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuál de sus dos lados está hacia arriba). Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las siguientes cosas:

(i) Retira un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba,

(ii) Voltea un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas tengan el mismo color hacer arriba. Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál jugador puede asegurar que ganará, el primero en jugar o el segundo?

(Décima Tercera Olimpiada Nacional de Matemáticas, Oaxaca, México, noviembre de 1999)

2. Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

(XXXIV Olimpiada Matemática Española, Fase nacional 1998 (Tarazona))

3. Hallar todas las funciones $\mathbf{f}:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ estrictamente crecientes y tales que: $f(n + f(n)) = 2 f(n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

(XXXIV Olimpiada Matemática Española, Fase nacional 1998 (Tarazona))

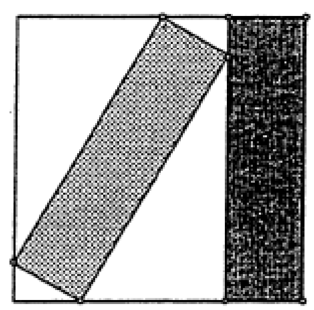
4. Sea ABCDE un pentágono (convexo) de manera que los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA, y EAB son todos de igual área. Demuestra que: $^{1}/_{4}$ área(ABCDE) < área(ABC) < $^{1}/_{3}$ área(ABCDE). (Novena Olimpiada Nacional de Matemáticas, México, Colima, noviembre de 1995)

5. Demostrar, que dados tres números positivos, podemos tomar dos de ellos, digamos x y y con $x > y$ tales que

$$\frac{x-y}{1+xy} < 1.$$

(XIV Olimpiada Portuguesa de Matemática, Categoría B (10°, 11°, 12°) Final Nacional 1996)

6. Un cuadrado de un metro de lado es dividido en dos rectángulos de modo que al colocar el menor de ellos sobre el mayor lo hacemos de forma que sobre cada lado del rectángulo mayor esté un vértice del menor, como se indica en la figura.



¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo menor?
(XIV Olimpiada Portuguesa de Matemática, Categoría B (10°, 11°, 12°) II Eliminatoria 1996)

7. Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en un círculo con centro O. Sea D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con BC y suponga que la perpendicular a AO pasa por D intersecando al segmento AC en un punto P (P $\in$ AC). Pruebe que AB = AP.
(XI Olimpiada Italiana de Matemática, 1995)

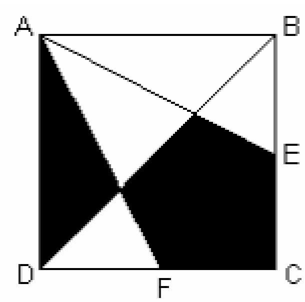
8. Hallar todas las parejas x y y tales que

$$x^2 + 615 = 2^y .$$

(XI Olimpiada Italiana de Matemática, 1995)

9. Dada una cuerda PQ de una circunferencia y M el punto medio de la cuerda, sean AB y CD dos cuerdas que pasan por M. Se trazan AC y BD hasta cortar a PQ en los puntos X e Y respectivamente. Demostrar que X e Y equidistan de M.
(XVII Olimpiada Nacional de Matemática del Paraguay, Ronda Final - Nivel 3, 2005)

10. En el cuadrado ABCD, el lado mide 10. E es el punto medio de BC y F es el punto medio de CD.



Hallar el área de la superficie pintada.
(XVII Olimpiada Nacional de Matemática del Paraguay, Ronda Final - Nivel 2, 2005)

8. Lógica y Matemática Recreativa.

Maynor Castro

Carlos Molina

Mauricio Ramírez

Simón Sánchez

Erick Solano

En la columna de esta edición vamos a presentar una colección de diez ejercicios que se han presentado en concursos de E.S.O de España.

Los E.S.O (Enseñanza Secundaria Obligatoria) son programas que se desarrollan en España en todos los niveles de secundaria con la finalidad de promover el gusto por las Matemáticas además de incentivar en el estudiante la capacidad de raciocinio y disciplina para mejorar los resultados de esta asignatura en ese país.

Les recordamos, o más bien les sugerimos, a los docentes que estos ejercicios pueden ser propuestos, en forma de juegos tal como se presentan en España, a toda la comunidad estudiantil de su institución (quizá un ejercicio por semana) para fomentar en ellos el gusto por esta asignatura a la vez que permita eliminar el temor por la misma.

Es importante hacer notar los aspectos didácticos de los juegos:

- Trabajo en grupo.
- Comunicación de ideas.
- Capacidad de interrogarse nuevas situaciones.
- Contraste de observaciones y conjeturas.
- Registro del proceso de resolución por parte de los jugadores.
- Revisión y reflexión sobre el proceso de resolución.

Centrándonos en el juego, resaltamos las siguientes capacidades en resolución de problemas, que son estimuladas por los juegos:

- Establecer analogías entre problemas.

- Empezar por el final.
- Resolver primero un problema más sencillo.
- Hacer una representación gráfica.
- Experimentar y extraer pautas.
- Sacar partido de la simetría.
- Utilizar modelos adecuados de expresión (verbales, gráficos, algebraicos, numéricos).
- Resolver problemas análogos.

Por otro lado, al final de los enunciados damos una solución a los mismos esperando que sirvan como una guía aunque sabemos que se pueden encontrar otras vías de solución a cada uno de ellos.

Pues bien, después de esta pequeña introducción empecemos y que se diviertan !!!

1º Juego (12-14 años): Tostado rápido

Hay que tostar en una parrilla tres rebanadas de pan. En la parrilla caben dos rebanadas a la vez, pero sólo se pueden tostar por un lado. Se tarda 30 segundos en tostar una cara de una pieza de pan, 5 segundos en colocar una rebanada, o en sacarla, y tres segundos en darle la vuelta.

¿Cuál es el mínimo de tiempo que se necesita para tostar las tres rebanadas?

(III O.M. Primera Fase. Albacete. 1992)

2º Juego (12-14 años): Veneno

Dos jugadores colocan diez fichas sobre una mesa. Cada jugador por turno puede coger una o dos fichas. El que coge la última ficha es "veneno" y pierde.

¿Se te ocurre alguna manera de ganar todas las veces?

¿Tiene algo que ver si empiezas tú o empieza el otro?

(IX O.M. Primera Fase. Albacete. 1998)

3º Juego (12-14 años): Hermanas con hermanos

Tres amigas, Irene, Sandra y Ericka, tienen un hermano cada una, Con el tiempo, cada chica acaba saliendo con el hermano de una de sus amigas.

Un día Irene se encuentra con el hermano de Sandra y le dice:"¡Mira!, ahí veo entrar al cine a alguien con tu pareja".

¿Puedes decir cómo están formadas las parejas?

(X O.M. Primera Fase. Albacete. 1999)

4º Juego (12-14 años): Sellos

Un coleccionista gasta 100 pesetas en comprar sellos de 1, 4 y 12 pesetas. ¿Cuántos sellos serán de cada clase si en total ha comprado 40?

(IX O.M. Fase Semifinal. Albacete. 1998)

5º Juego (12-14 años): La travesía

Una excursión a pie para atravesar un cierto paraje pirenaico requiere marchar durante seis jornadas seguidas. Sin embargo, una persona sólo puede transportar comida para cuatro días. ¿Cuántas jornadas ha de invertir para hacer la excursión en solitario?

(Se supone que el arriesgado aventurero puede hacer algunas expediciones cortas para depositar comida en puntos intermedios del recorrido).

(XII O.M. Primera Fase. Albacete. 2001)

6º Juego (12-14 años): Balanza de platillos

Con una balanza de platillos se puede pesar desde 1 hasta 13 kg utilizando solamente tres pesas A, B y C.

Indica de cuántos kg han de ser las pesas A, B y C, y, cómo realizarías cada una de las pesadas anteriores utilizando estas pesas.

(XVI O.M. Thales. Fase Regional. Ubeda (Jaén). 2000)

7º Juego (14-16 años): El codicioso

Un campesino se dirigía a la ciudad, pensando tristemente que el dinero que llevaba no iba a ser suficiente para comprar el lechoncillo que deseaba. A la entrada del puente se encontró con un tipo raro (era el diablo ni más ni menos), que le dijo: conozco tu preocupación y voy a proponerte un trato. Si lo aceptas, cuando hayas cruzado el puente tendrás en tu bolsa doble dinero que al empezar. No cuentes el dinero, que sería desconfianza por tu parte. Sólo debes contar 32 monedas para echarlas al río; yo sabré encontrarlas y éstas serán mi paga.

Aceptó el aldeano, y apenas cruzado el puente comprobó, lleno de alegría y sin necesidad de contar, que su bolsa pesaba más que antes. Con gran contento echó las 32 monedas al agua. Le vino entonces la tentación de repetir la acción y no supo resistirla, así que de nuevo pasó el puente, duplicó el dinero de su bolsa y pagó con 32 monedas. Todavía una tercera vez hizo esto mismo y entonces, desolado, comprobó que se había quedado absolutamente sin ningún dinero. Desesperado, se tiró desde el puente al río y el diablo cobró así su trabajo. Se pregunta cuánto dinero llevaba el campesino cuando le propusieron el malhadado trato.

(VIII O.M. Fase Semifinal. Albacete. 1997)

8º Juego (14-16 años): Blanco, Rubio y Castaño

Tres personas, de apellidos Blanco, Rubio y Castaño, se conocen en una reunión. Poco después de hacerse las presentaciones, la dama hace notar:

- "Es muy curioso que nuestros apellidos sean Blanco, Rubio y Castaño, y que nos hayamos reunido aquí tres personas con ese color de cabello".
- "Sí que lo es - dijo la persona que tenía el pelo rubio -, pero habrás observado que nadie tiene el color de pelo que corresponde a su apellido".
- "¡Es verdad!" - exclamó quien se apellidaba Blanco.

Si la dama no tiene el pelo castaño, ¿de qué color es el cabello de Rubio?

(XIII O.M. Primera Fase. Albacete. 2002)

9º Juego (12-14 años): Velar la noche

Los alumnos de 2º de E.S.O. se van de acampada en las vacaciones de verano y deciden dejar encendida una vela cada noche durante el campamento. Sabiendo que si la vela permanece encendida toda la noche queda 1/4 de vela y por tanto con los restos de las velas de 4 noches se tiene una vela que puede utilizarse otra noche, ¿cuántas noches estarán de acampada si compran 16 velas?

Calcula el MENOR número de velas que deben comprar si quieren encender una vela durante 105 noches.

(XIII O.M. Región de Murcia. 2002)

10º Juego (14-16 años): Tres sombreros

Un árbitro elige tres sombreros de un conjunto de tres blancos y dos negros. Tres hombres sentados, alineados uno tras otro, y todos mirando en la misma dirección (de manera que cada uno sólo puede ver el sombrero de los que tiene delante de él) cierran los ojos mientras se les encasqueta su chapeo.

Los sombreros no utilizados se ocultan de la vista.

El árbitro le pregunta al tercero de la hilera si sabe el color de su sombrero. Éste contesta: "No lo sé".

Hace entonces la misma pregunta al sentado en el centro. También éste contesta: "No lo sé". Cuando se lo pregunta al ocupante de la primera silla, éste contesta: "Sí, mi sombrero es blanco".

¿Cómo pudo deducirlo?.

(XIV O.M. Primera Fase. Albacete. 2003)

SOLUCIONES PROPUESTAS

Tostado rápido

118 segundos

Para simplificar establecemos las siguientes claves:

- Rebanadas: A, B, C
- Colocar rebanada: CA, CB, CC
- Sacar rebanada: SA, SB, SC
- Colocar segunda cara de la rebanada: CAA, CBB, CCC
- Sacar rebanada totalmente tostada: SAA, SBB, SCC
- Termina la operación: TAA

Tiempo en segundos	5	10	40	45	48	78	83	88	113	118
Acción terminada	CA	CB	SA	CC	CBB	CCC	SBB	CAA	SCC	TAA

Veneno

Gana siempre el segundo.

Para ello tienen que coger entre el primero y el segundo tres fichas. Es decir: si el primero coge 1, el segundo coge 2 y viceversa.

Hermanas con hermanos

Sí el hermano de Sandra se encuentra con Irene su pareja es Ericka. Irene con el hermano de Ericka y Sandra con el hermano de Irene.

Sellos

28 de 1 pesetas 9 de 4 pesetas y 3 de 12 pesetas.

- Sí los 40 sellos fueran de 1 pesetas valdrían 40 pesetas.
- Sí los 40 sellos fueran de 4 pesetas valdrían 160 pesetas.

- Sí la mitad de los sellos fueran de 1 pesetas y la otra mitad de 4, valdrían:
  20 x 1 = 20 + 20 x 4 = 80. En total 100 pesetas.
- Como también hay sellos de 12 pesetas, por tanteo, buscamos la combinación:
  - 22 x 1 + 17 x 4 + 1 x 12 = 102
  - 24 x 1 + 14 x 4 + 2 x 12 = 104
  - 26 x 1 + 11 x 4 + 3 x 12 = 106 (quitamos 2 de 4 y ponemos 2 de 1 y tenemos la solución)

La travesía

En atravesar el paraje tarda 12 días.

El aventurero sale del punto de partida con comida para 4 días. Al finalizar la primera jornada deja comida para dos días y vuelve al punto de partida. Vuelve a salir con comida para 4 días. Al finalizar la segunda jornada deja comida para 1 día y vuelve hasta el lugar donde finalizo la primera jornada, recoge comida para 1 día y vuelve al punto de partida. Coge comida para 4 días. Al finalizar la primera jornada, le queda comida para 3 días pero toma la comida que dejó en el primer viaje y continúa con comida para 4 días. Al finalizar la segunda jornada le ocurre exactamente lo mismo que en la jornada anterior. Como continúa con 4, la comida le viene justa.

Balanza de platillos

Las pesas son de 1, 3 y 9.

1: 1 --------- ?	6: 9 --------- 3+?	11: 9+3 ------- 1+?
2: 3 --------- 1+?	7: 9+1 ------- 3+?	12: 9+3 ------- ?
3: 3 --------- ?	8: 9 --------- 1+?	13: 9+3+1 ------ ?
4: 3+1 ------- ?	9: 9 --------- ?	
5: 9 --------- 3+1+?	10: 9+1 ------- ?	

El codicioso

El campesino llevaba al principio 28 monedas.

0+32=32; 32/2=16; 16+32=48; 48/2=24; 24+32=56; 56/2= 28 monedas

(En esta solución se empezó por el final)

Blanco. Rubio y Castaño

Blanco, no tiene el pelo rubio, (al hablar después de él) ni blanco,(coincide con su apellido) tiene que tener el pelo castaño.

Rubio, no puede tener el pelo rubio(no puede coincidir con el apellido) ni castaño (es el de Blanco) tiene que tener el pelo blanco y es la dama.

Velar la noche

Si compran 16 velas y cada cuatro restos de vela hacen otra vela, pasarán de acampada: 16+16/4+4/4=21 días.

Gráficamente lo expresaríamos del siguiente modo:

1

1 1 1 1

1111 1111 1111 1111

Si observamos detenidamente vemos que 21 es múltiplo 105. Por lo tanto necesitaremos 5 tandas de 16 velas. 16·5=80 velas. Pero como en cada tanda de vela sobra 1/4 de vela nos sobrarían 5/4 de vela (con 4/4 de ellas elaboramos otra vela). Así pues, con una vela menos nos arreglaríamos, es decir, COMPRARÍAMOS 79 VELAS.

Tres sombreros

El tercero al contestar: "No lo sé" afirma que los sombreros de delante no son ambos negros pues en caso contrario el de él sería blanco.

El segundo al contestar: "No lo sé" afirma que el sombrero del primero no es negro pues en caso contrario el de él sería blanco y daría la respuesta correcta.

El primero de esta manera deduce que el suyo ha de ser blanco.

Para concluir con esta columna acá les contamos una anécdota que puede parecer un chiste pero que es cierto:

“En cierta universidad de cuyo nombre no quiero acordarme resulta que se dan unas clases de matemáticas que utilizan una calculadora gráfica como parte esencial del curso. La gente que se matricula en este curso no suele ir demasiado bien preparada... se cuenta esta historia como algo que realmente ocurrió por esos lugares.

Una estudiante va el primer día a clase toda entusiasmada con su calculadora gráfica recién comprada. A los cuarenta minutos, el profesor les dice que saquen la calculadora, y que van a empezar en ese mismo momento a utilizarla. Esta chica está toda ilusionada, y sigue las instrucciones cuidadosamente, pero observa inquieta que no puede borrar la pantalla Empieza a apretar todas las teclas habidas y por haber, pero no consigue borrar el famoso display gráfico. Entonces pregunta a otra chica al lado suyo, que parecía estar controlando la situación: "Oye, ¿qué tengo que hacer para borrar la pantalla?" La otra chica le quitó el plástico protector a la pantalla y le devolvió la calculadora, sin decir una sola palabra.”