Factorización de Polinomios

Objetivo:

Efectuar la factorización de polinomios en forma completa mediante la combinación de métodos.

Contenido:

Factorización por factor común.

Factorización por diferencia de cuadrados.

Factorización del trinomio cuadrático.

Factorización por agrupación.

FACTORIZAR *Significa expresar en factores, así por ejemplo 4 + 2 no es factorización de 6, pero 2. 3 si lo es.*
Al proceso de descomposición de un polinomio en el producto de dos o más factores polinómicos, se le denomina factorización
Cuando se expresa un polinomio, de tal forma que ya no se le peda aplicar ningún método de factorización, diremos que tenemos su factorización completa.

Existen varios métodos para descomponer un polinomio. Analizaremos algunos de ellos.

FACTORIZACIÓN POR FACTOR COMÚN

Este método es una aplicación inmediata de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y la resta.

Consiste en extraer de cada uno de los términos de un polinomio real, la expresión común a todos ellos.

- Esta expresión puede ser numérica, cuando existe un divisor común a cada uno de los coeficientes numéricos del polinomio.

Ejemplo 1:

4 es divisor de 4,8, 16 por lo que es el factor numérico común de la expresión $4x+8y-16$*. Por lo que esta expresión se puede expresar como* $4(x+2y-4)$*.*

- Esta expresión puede ser literal, cuando existe una o más variables que se repitan en los términos del polinomio, para este efecto se tomará como factor común la o las variables de menor exponente.

Ejemplo2:

x *es el factor común de la expresión* $3x+4xy-mx$*, ya que esta en cada uno de los tres términos del trinomio, por lo tanto se puede expresar de cómo* $x(3+4y-m)$*.*

- Esta expresión puede ser otro polinomio.

Ejemplo 3:

$3(x-4)+m(x-4)+h(x-4)$*, es este caso se expresaría como* $(x-4)(3+m+h)$*.*

Ejemplo 4:

$5(x-7)+h(7-x)=5(x-7)-h(x-7)=(x-7)(5-h)$

También puede ser una combinación de los anteriores.

Aplicar el método de factor común para expresar como productos los siguientes polinomios

(1)	$4x+4y$	(11)	$25a^2b^3-5ab-30a^3b^2$
(2)	$3xy-6y$	(12)	$-6y^3-3y^2-3y$
(3)	$28x^3+35x^2$	(13)	$a(x-2)-3(2-x)$
(4)	$4x^3+20x^4$	(14)	$x^2(2x+1)-3x(2x+1)$
(5)	$24xy^2-27x^2y$	(15)	$6(x-4)-a(4-x)$
(6)	$72t^6+40t^4$	(16)	$2x(x+6)-3(x+6)$
(7)	$28a^2b^3-44a^4b^2$	(17)	$4(3x-2)-12x(3x-2)$
(8)	$2x^3-4x^2+8x$	(18)	$3x^2(2x+3)-x(2x+3)$
(9)	$3y^3-6y^2+9y$	(19)	$x^2(4-x)+3x(4-x)+(x-4)$
(10)	$-3x^2-3xy$	(20)	$11x^2-22x-121$

FACTORIZACIÓN DE LA DIFERENCIA DE CUADRADOS

La diferencia de dos cuadrados se decompone en el producto de la suma por la diferencia de las bases de esos cuadrados.

Ejemplo 5

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

$25x^2 - 16 = (5x)^2 - 4^2 = (5x+4)(5x-4)$

Ejemplo 6

$x^3 - 25x = x(x^2 - 25) = x(x+5)(x-5)$

$5x^2 - 5 = 5(x^2 - 1) = 5(x+1)(x-1)$

Ejemplo 7

$(y-3)^2 - m^2 = ((y-3)+m)((y-3)-m) = (y-3+m)(y-3-m)$

$x^2 - (3+2y)^2 = (x+(3+2y))(x-(3+2y)) = (x+3+2y)(x-3-2y)$

Ejemplo 8

$(x+2)^2 - (3+2y)^2 = [x+2+(3+3y)].[x+2-(3+3y)] = (x+2+3+3y)(x+2-3-3y) = (x+3y+5)(x-3y-1)$

Ejemplo 9

$x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4)$

$(x^2+4)(x+2)(x-2)$

$16x^4 - 125 = (4x^2+25)(4x^2-25)$

$(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)$

Antes de utilizar cualquier método es necesario determinar si el polinomio tiene factor común.

Ejemplo 10

$7x^3 - 28x = 7x(x^2 - 4) = 7x(x+2)(x-2)$

La suma de dos cuadrados no es factorable en el sistema real.

Ejemplo 11:

$x^2 + 4,$ no es factorizable

En general, la diferencia de dos número se decompone como el producto, de la suma por la resta, de la raíz cuadrada de cada uno se sus términos. Por esto la diferencia de dos términos siempre se puede factorizar.

Ejemplo 12.

$x^2 - 5 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

Práctica: Hallar la factorización completa de los siguientes binomios

(1) $a^2x^2 - 49b^2$

(2) $16a^2 - b^2y^2$

(3) $-2h^2 + 8k^4$

(4) $a^4 - b^4$

(5) $x^4 - 9$

(6) $y^4 - 81$

(7) $36y^8 - 49$

(8) $16x^6 - 9y^4$

(9) $5 - 80a^4b^{12}$

(10) $y^3 - y^5$

(11) $a^2x^2y - 16y$

(12) $5x^2 - 5$

(13) $3x^3 - 3x$

(14) $2a^2 - 8b^2$

(15) $3a^2b^2 - 12a^4$

(16) $2x^2 - 32x^2y^4$

(17) $81x^8 - y^4$

(18) $3a^6 - 12a^2$

(19) $4a^2x^2 - 16a^2x^4$

(20) $4a^2 - 121b^2$

(21) $(y-3)^2 - m^2$

(22) $y^2 - (x-1)^2$

(23) $(h-1)^2 - m^2$

(24) $b^2 - (h-3)^2$

(25) $(m+2)^2 - (h-1)^2$

(26) $(h+3)^2 - (b-5)^2$

(27) $(m-6)^2 - (a+3)^2$

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO CUADRÁTICO

***Teorema del Factor**: Sea P(x) un polinomio. Si P(a)=0, se dice que "a" es un cero del polinomio y una raíz de la ecuación P(x)= 0, además (x – a) es un factor del polinomio.*

El teorema anterior nos explica que del cero de un polinomio, podemos determinar al menos un factor del polinomio. Ya que podemos determinar las raíces o ceros de un trinomio, podemos determinar los factores de ese trinomio.

Ejemplo 13:
En el polinomio $x^2 + 7x + 12$, el discriminante es mayor que cero, por lo que tiene dos soluciones, estas son $x_1 = -3$ y $x_2 = -4$.
Por el teorema anterior podemos afirmar que $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

Ejemplo 14:
En los casos en el que el discriminante es igual a cero, tiene una sola solución, el factor se repite. $x^2 + 6x + 9$ tiene una sola solución $x = -3$, en este caso podemos afirmar que $x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3)$

Ejemplo 15:
Un caso particular es cuando una de las soluciones o ambas es una fracción, debemos despejar para determinar cual es el factor. Para $2x^2 + 9x + 9$ las soluciones son $x_1 = \frac{-3}{2}$ y $x_2 = -3$.

$$x = \frac{-3}{2} \quad \rightarrow \quad 2x = -3 \quad \rightarrow \quad 2x + 3 = 0$$

Por lo que podemos afirmar que $2x^2 + 9x + 9 = (2x+3)(x+3)$

Si el discriminante es negativo, no es factorizable en el conjunto de los números reales.

Practica: Realice la factoricación completa de cada uno de los siguientes polinomios.

1) $x^2 - 10x + 25$
2) $5x^2 - x + 1$
3) $5x^2 + 3x - 2$
4) $6x^2 - 7x - 3$
5) $x^2 - x + 1$
6) $2x - 4x^2 + 6$
7) $6 + x^2 - x$
8) $x^2 + x - 6$
9) $x^2 - x + 1$
10) $x^2 - 4x - 5$
11) $x^2 + 2x - 3$
12) $10t^2 - 3t + 15$
13) $x^2 + 3x + 2$
14) $3x^2 - 5x + 2$
15) $9x^2 + 6x + 1$
16) $x^2 - 2x - 2$
17) $x^2 - x - 6$
18) $y^2 - 2y - 3$
19) $9x^2 + 42x + 49$
20) $x^2 - 13x + 12$
21) $12 - 15x - x^2$
22) $7 - 3x - x^2$
23) $x^2 - 7x + 9$
24) $3x^2 - 2x + 5$
25) $x^2 - 2x - 7$
26) $5x^2 - 3x + 4$

FACTORIZACIÓN POR AGRUPACIÓN

Algunas veces no encontramos factor común a todos los términos del polinomio, entonces es útil descomponer el polinomios en grupos de igual número de términos, donde cada grupo tenga un factor común. Estos grupos se separan mediante la suma.

Ejemplo 16:

$am + bm + ap + bp$ es un polinomio de cuatro términos que no posee un factor común a los cuatro. Pero si lo separamos en dos grupos. Tendremos un factor común en cada grupo.

Es decir así:

$$(am + bm) + (ap + bp)$$

en el primer grupo el factor es "m" y en el segundo es "p" por lo que puede tenerse que

$$(am + bm) + (ap + bp) = m(a+b) + p\,(a+b),$$

podemos observar como en esta nueva forma de expresar el polinomio se tiene un factor común (a+b) por lo anterior podemos afirmar que:

$$(am + bm) + (ap + bp) = m\,(a+b) + p\,(a+b) = (a+b)\,(m+p).$$

Ejemplo 17:

$$\begin{aligned} 3x-2ab+nx-2bx+an+3a = (3x+nx-2bx) + (3a+an-2ab) &= x(3+n-2b) + a(3+n-2b) \\ &= (3+n-2b)\,(x+a) \end{aligned}$$

Ejemplo 18:

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x^3 + x^2) + (2x + 2) = x^2(x+1) + 2\,(x+1) = (x+1)\,(x^2+2)$$

Ejemplo 19:

$x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = (x^3 + 2x^2) + (-25x - 50) = x^2(x + 2) - 25(x + 2) = (x+2)(x^2 - 25$

$= (x+2)(x+5)(x-5)$

Practica

1. Factorizar completamente los siguientes polinomios

(1)	$5a - ax + 5b + 5c - bx - cx$	(11)	$a^2y + ab^2 - axy - b^2x$
(2)	$x^3 - 2xy + 3x^2y - 6y^2$	(12)	$16amx - y + 2x - 8amy$
(3)	$7a + 3ab - 3b - 7$	(13)	$2a^2b - 3ab^2 + 4am - 6bm$
(4)	$ax + by + ay + bx$	(14)	$10xy^2 + 8my - 4mx - 5x^2$
(5)	$2mx + n^3x - 2my - n^3y$	(15)	$15x - 10a - 18xb + 12ab$
(6)	$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$	(16)	$3bm - 4cm + 6bp - 8cp$
(7)	$4ac + 2bc - 2ad - bd$	(17)	$x^3 + 2x^2 - x - 2$
(8)	$3x^3 + 2x^2 + 12x + 8$	(18)	$x^2y^2 + ay^2 + ab + bx^2$
(9)	$7x + y - xy - 7 - z^2 + xz^2$	(19)	$ax + ay + bx + by$
(10)	$3x^2 - 4y + 3x^2a^2 - 4a^2y$	(20)	$8x^3 + 2x^2 + 12x + 3$

2. Factorizar completamente los siguientes polinomios

(1)	$x^3 + 2x^2 - 25x - 50$	(8)	$4x^3 - 20x^2 - 9x + 45$
(2)	$2x^3 + 5x^2 - 18x - 45$	(9)	$x^3 - 2x^2 - x + 2$
(3)	$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$	(10)	$3x^3 - 5x^2 - 48x + 80$
(4)	$x^3 - 5x^2 - 4x - 20$	(11)	$3x^3 - 5x^2 - 147x + 245$
(5)	$x^3 - 7x^2 - 9x + 63$	(12)	$2x^3 - 3x^2 - 50x + 75$
(6)	$x^3 - 8x^2 - 81x + 648$	(13)	$7x^3 - x^2 - 7x + 1$
(7)	$x^3 - 10x^2 - 49x + 490$	(14)	$6x^3 - 5x^2 - 6x + 5$

BIBLIOGRAFÍA

ALGEBRA ELEMENTAL
Dr. Aurelio Baldor 1969.

MATEMATICAS BASICAS CON VECTORES Y MATRICES
Howard E. Taylor y Thomas L. Wade 1980.

PRECALCULO FUNCIONES Y GRAFICAS
Raymond A. Barnett 1999.

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE: 10^{mo}.
Lic. Roxanna Meneses Rodríguez 1991.

MATEMÁTICA ELEMENTAL CON APLICACIONES
Luis Valverde Fallas 1997.

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA
Juan Félix Ávila Herrera 1988.

ELEMENTOS DEL ALGEBRA PARA BACHILLERATO
Irving Drooyan – William Wooton 1983.